Решения некоторых задач, предлагавшихся на практических занятиях

Версия от 3 января 2015 г.

Этот текст написан для того, чтобы *проиллюстрировать*, как можно решать задачи по теории вероятностей и математической статистике, и *помочь подготовиться к контрольным работам и экзаменам.* Обратите внимание на то, что в решениях большое внимание уделяется *объяснениям.* Надеюсь, что разобрав эти решения, вы станете лучше понимать изучаемую дисциплину.

1. Операции над случайными событиями

1. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Найдите вероятность выигрыша для каждого игрока. Опишите вероятностное пространство этой задачи.

Решение. Обозначим возможные исходы при бросании монеты через Р (решка) и Г (герб). Разумно считать, что монета является симметричной, и вероятность появления герба или решки одинакова и равна $1/2$.

В этой задаче случайный эксперимент состоит в выяснении того, кто же из игроков победил в этой игре.

Для построения вероятностного пространства опишем все возможные элементарные исходы случайного эксперимента. Элементарные исходы можно описать с помощью слов, состоящих из букв Р и Г и имеющих конечную длину. Например, слово РРГ означает, что в первых двух бросаниях монеты выпала решка, а в третьем — герб. Если реализуется этот элементарный исход, то победит первый игрок. Каждый элементарный исход устроен следующим образом: слово начинается с некоторого количества букв Р, а заканчивается всегда на букву Г. Множество всех элементарных исходов

$$\Omega = \{\text{Г, РГ, РРГ, РРРГ}, \dots\}.$$

Поскольку множество Ω состоит из *не более чем счетного* числа элементарных исходов, то σ-алгебра $\mathcal{F}$ событий, связанных со случайным экспериментом, состоит из множества всех подмножеств Ω.

Зададим вероятность каждого элементарного исхода. Поскольку $\mathbb{P}(\text{Р}) = \mathbb{P}(\text{Г}) = 1/2$, а результаты различных бросаний монеты *независимы*, то вероятность элементарного исхода, задаваемого словом из n букв, равна $1/2^n$, например,

$$\mathbb{P}(\text{РРГ}) = \mathbb{P}(\text{Р})\mathbb{P}(\text{Р})\mathbb{P}(\text{Г}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Зная вероятность каждого элементарного исхода, мы можем найти вероятность любого случайного события, просуммировав вероятности тех элементарных исходов, которые составляют это случайное событие.

Таким образом, вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ построено. Стоит отметить, что вероятностное пространство может быть построено и другими (эквивалентными) способами. Приведенный способ, по-видимому, является самым простым.

До этого момента мы занимались *формализацией* задачи. Применение методов теории вероятностей начинается уже *после того, как построено вероятностное пространство.*

Пусть A — случайное событие, состоящее в том, что выиграл первый игрок, а событие B обозначает, что выиграл второй игрок:

$$A = \{\text{выиграл первый игрок}\}, \quad B = \{\text{выиграл второй игрок}\}.$$

Событие A можно представить в виде объединения *попарно несовместных* элементарных исходов:

$$A = \text{Г} \cup \text{РРГ} \cup \text{РРРРГ} \cup \ldots,$$

поэтому вероятность события A равна

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{Г}) + \mathbb{P}(\text{РРГ}) + \mathbb{P}(\text{РРРРГ}) + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{2}{3}.$$

Аналогично,

$$B = \text{РГ} \cup \text{РРРГ} \cup \text{РРРРРГ} \cup \ldots,$$

поэтому

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\text{РГ}) + \mathbb{P}(\text{РРРГ}) + \mathbb{P}(\text{РРРРРГ}) + \ldots = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{3}.$$

Заметим, что $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$. Это служит подтверждением тому, что расчеты проведены правильно.
Ответ. Первый игрок побеждает с вероятностью $2/3$, второй игрок — с вероятностью $1/3$.

2. Комбинаторика

2. Из полной колоды для игры в преферанс (32 карты) вытянули 10 карт. Какова вероятность того, что среди этих карт есть

а) хотя бы один туз;

б) ровно один туз;

в) не менее двух тузов;

г) ровно два туза?

Решение. Случайный эксперимент состоит в том, что из 32 карт наудачу вынимаются 10 карт. Порядок среди вынутых 10 карт не важен; важен лишь состав полученного расклада. Поскольку карты одинаковы по размеру и форме, то разумно предположить, что все расклады равновероятны. Это значит, что задача может быть решена с применением *классической схемы.*

В задаче нужно ответить на четыре вопроса, поэтому введем четыре случайных события:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{среди 10 карт есть хотя бы один туз}\}, \\ B &= \{\text{среди 10 карт есть ровно один туз}\}, \\ C &= \{\text{среди 10 карт есть не менее двух тузов}\}, \\ D &= \{\text{среди 10 карт есть ровно два туза}\}. \end{aligned}$$

Поскольку множество из 32 карт можно разделить на 4 туза и 28 остальных карт, то для подсчета вероятностей событий можно воспользоваться *гипергеометрическим распределением.*

Сначала вычислим вероятности событий B и D:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{C_4^1 C_{28}^9}{C_{32}^{10}} = \frac{4\cdot 28!}{9!19!}\cdot\frac{10!22!}{32!} = \frac{4\cdot 10\cdot 20\cdot 21\cdot 22}{29\cdot 30\cdot 31\cdot 32} \approx 0.428,\\ \mathbb{P}(D) &= \frac{C_4^2 C_{28}^8}{C_{32}^{10}} = \frac{6\cdot 28!}{8!20!}\cdot\frac{10!22!}{32!} = \frac{6\cdot 9\cdot 10\cdot 21\cdot 22}{29\cdot 30\cdot 31\cdot 32} \approx 0.289.\end{aligned}$$

Событие A можно представить в виде объединения попарно несовместных событий, означающих, что на руках есть ровно 1 туз, ровно 2 туза, ровно 3 туза, ровно 4 туза, найти вероятность каждого из этих событий и сложить результаты. Однако, это трудоемкий способ вычисления $\mathbb{P}(A)$. Проще найти вероятность противоположного события ($\bar{A}$), а потом вычислить $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$. Поскольку

$$\bar{A} = \{\text{среди 10 карт нет тузов}\},$$

то

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{C_4^0 C_{28}^{10}}{C_{32}^{10}} = \frac{28!}{10!18!}\cdot\frac{10!22!}{32!} = \frac{19\cdot 20\cdot 21\cdot 22}{29\cdot 30\cdot 31\cdot 32} \approx 0.203,$$

так что $\mathbb{P}(A) \approx 0.797$.

Наконец, событие C означает, что на руках либо 2, либо 3, либо 4 туза, поэтому

$$\mathbb{P}(C) = \frac{C_4^2 C_{28}^8 + C_4^3 C_{28}^7 + C_4^4 C_{28}^6}{C_{32}^{10}} \approx 0.368.$$

Ответ. а) $1 - \frac{C_4^0 C_{28}^{10}}{C_{32}^{10}} \approx 0.797$; б) $\frac{C_4^1 C_{28}^9}{C_{32}^{10}} \approx 0.428$; в) $\frac{C_4^2 C_{28}^8 + C_4^3 C_{28}^7 + C_4^4 C_{28}^6}{C_{32}^{10}} \approx 0.368$; г) $\frac{C_4^2 C_{28}^8}{C_{32}^{10}} \approx 0.289$.

3. Генуэзская лотерея. Участники покупают билеты, на которых написано несколько чисел от 1 до 90. Стоимость одного билета не зависит от количества написанных на нем чисел. В день розыгрыша из мешка с жетонами, помеченными числами от 1 до 90, вынимают 5 жетонов. Выигрывают те билеты, на которых *все* написанные числа содержатся среди вытянутых жетонов. При этом осуществляются следующие выплаты по выигрышным билетам:

- с одним числом — 15 стоимостей билета;
- с двумя числами — 270 стоимостей билета;
- с тремя числами — 5500 стоимостей билета;
- с четырьмя числами — 75 000 стоимостей билета;
- с пятью числами — 1 000 000 стоимостей билета.

Рассчитайте доходность этой лотереи.

Решение. Из 90 жетонов можно вытянуть 5 жетонов C_{90}^5 способами. Если куплен билет с одним числом, то всего существует C_{89}^4 комбинаций, когда угадано одно число (остальные 4 числа из оставшихся 89 могут быть выбраны как угодно). Так что вероятность выигрыша равна

$$\frac{C_{89}^4}{C_{90}^5} = \frac{89!\cdot 5!\cdot 85!}{4!\cdot 85!\cdot 90!} = \frac{1}{18},$$

откуда видно, что в среднем из 18 купленных билетов цена трех остается в кармане устроителей этой лотереи. Аналогично вычисляем остальные вероятности. Для билетов с двумя числами она составляет

$$\frac{C_{88}^3}{C_{90}^5} = \frac{88! \cdot 5! \cdot 85!}{90! \cdot 3! \cdot 85!} = \frac{2}{801},$$

с тремя числами —

$$\frac{C_{87}^2}{C_{90}^5} = \frac{87! \cdot 5! \cdot 85!}{90! \cdot 2! \cdot 85!} = \frac{1}{11\,748},$$

с четырьмя числами —

$$\frac{C_{86}^1}{C_{90}^5} = \frac{86! \cdot 5! \cdot 85!}{90! \cdot 1! \cdot 85!} = \frac{1}{511\,038}$$

и, наконец, с пятью числами —

$$\frac{1}{C_{90}^5} = \frac{1}{43\,949\,268}.$$

Из этих результатов видно, что чем выше ставка, тем более невыгодной становится лотерея для тех, кто в нее играет.

4. Из множества чисел $\{1, \ldots, N\}$ случайно выбирается число a. Найдите $\lim\limits_{N\to\infty} p_N$, где p_N — вероятность того, что $a^2 - 1$ делится на 10.

Решение. Заметим, что число $a^2 - 1$ делится на 10 тогда и только тогда, когда число a заканчивается либо цифрой 1, либо цифрой 9.

Пусть, к примеру, $N = 20$. В этом случае имеется 4 числа, заканчивающихся на 1 или 9: 1, 9, 11, 19. Поскольку вероятность выбрать любое из чисел из множества $\{1, \ldots, N\}$ равна $1/N$, то $p_{20} = 4/20 = 1/5$.

В общем случае, обозначим $d(N)$ — количество чисел, оканчивающихся на 1 или 9, среди первых N натуральных чисел. Пусть $[x]$ обозначает целую часть числа x. Если N заканчивается на 0, то $d(N) = 2 \cdot [N/10]$. Если N заканчивается на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 или 8, то $d(N) = 2 \cdot [N/10] + 1$. Наконец, если N оканчивается на 9, то $d(N) = 2 \cdot [N/10] + 2$.

Вероятность

$$p_N = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{если } N \text{ заканчивается на } 0, \\ \frac{2*[N/10]+1}{N}, & \text{если } N \text{ заканчивается на } 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \\ \frac{2*[N/10]+2}{N}, & \text{если } N \text{ заканчивается на } 9. \end{cases}$$

При $N \to \infty$ предел p_N равен $1/5$.

Ответ. $1/5$.

5. Тасуются две колоды, в каждой из которых по 52 карты. Затем выбираются по одной карте из каждой колоды до тех пор, пока вынимаемые в очередной раз карты не совпадут или не закончатся колоды. Какова вероятность того, что совпадение все-таки произойдет?

Решение. Занумеруем карты первой колоды числами от 1 до n (в рассматриваемой задаче $n = 52$). Совпадение не произойдет тогда и только тогда, когда при случайной расстановке n чисел ни одно из них не попадет на место со своим номером. Общее количество вариантов произвольной расстановки чисел равно $n!$, количество вариантов «благоприятной» расстановки составляет

$$n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! - C_n^3 \cdot (n-3)! + \ldots.$$

(Из общего числа расстановок ($n!$) вычтем те ($C_n^1 \cdot (n-1)!$), при которых одно из чисел попадает на место со своим номером; при этом варианты, когда два числа попадают на места со своими номерами, были учтены дважды, так что количество таких вариантов надо прибавить ($C_n^2 \cdot (n-2)!$); однако при этом варианты, когда три числа попадают на места со своими номерами, были учтены дважды, поэтому их нужно вычесть и т. д. Эти рассуждения напоминают доказательство формулы включений и исключений.)

Искомая вероятность равна отношению

$$\frac{n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! - C_n^3 \cdot (n-3)! + \dots}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots$$

Эта знакопеременная сумма достаточно быстро сходится к числу $e^{-1} \approx 0.367$. Таким образом, шансы на выигрыш в пари на совпадение практически не зависят от количества карт в колоде и примерно равны $1 - 0.367 \approx 2/3$.
Ответ. ≈ 0.633.

6. При игре в покер игроку из полной колоды в 52 карты сдают 5 карт. Найдите вероятность того, что у игрока выпадет комбинация:

1) «ройял-флеш» — 10, В, Д, К, Т одной масти;
2) «стрит-флеш» — 5 последовательных по значению карт одной масти (включая Т, 2, 3, 4, 5);
3) «каре» — четыре карты одного значения;
4) «фул-хаус» — три карты одного значения и две карты другого;
5) «флеш» — пять карт одной масти;
6) «стрит» — 5 последовательных по значению карт произвольных мастей (включая Т, 2, 3, 4, 5);
7) «сет» — три карты одного значения и две других различных значений;
8) «две пары» — две различные пары карт и одна карта отличного от них значения;
9) «пара» — пара карт и три карты различных значений;
10) «старшая карта» — все остальные комбинации.

Указанные комбинации упорядочены по старшинству от самой сильной до самой слабой.
Решение. Поскольку порядок карт, выданных игроку, не важен, то общее число исходов эксперимента равно $C_{52}^5 = 2\,598\,960$. Вычислим количество благоприятных исходов для каждой из комбинаций.

1) Ройял-флеш может появиться 4 способами, соответствующими 4 мастям колоды карт. Вероятность равна $\frac{4}{C_{52}^5} = \frac{1}{649\,740} \approx 1.539 \cdot 10^{-6}$.

2) Существует 9 различных стрит-флешей, от Т, 2, 3, 4, 5 до 9, 10, В, Д, К (ройял-флеш считается отдельно), и 4 способа выбора масти для каждого из них. Всего выходит 36 благоприятных исходов, а соответствующая вероятность равна $\frac{9 \cdot 4}{C_{52}^5} = \frac{3}{216\,580} \approx 1.385 \cdot 10^{-5}$.

3) Достоинство четырёх карт, составляющих каре, можно выбрать 13 способами. Вне зависимости от этого оставшуюся пятую карту можно выбрать 48 способами. По правилу произведения число благоприятных исходов составляет $13 \cdot 48 = 624$, а соответствующая вероятность равна $\frac{13 \cdot 48}{C_{52}^5} = \frac{1}{4165} \approx 2.4 \cdot 10^{-4}$.

4) Выбор достоинств карт для тройки и пары, составляющих фул-хаус, можно осуществить A_{13}^2 способами (здесь важен порядок). Далее, выберем из четырёх мастей три для карт, входящих в тройку, C_4^3 способами и масти для карт пары C_4^2 способами. По правилу произведения имеем число благоприятных исходов $A_{13}^2 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2 = 3744$, а вероятность равна $\frac{A_{13}^2 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{6}{4165} \approx 1.44 \cdot 10^{-3}$.

5) Пять карт одной масти можно выбрать $4 \cdot C_{13}^5$ способами, но из этих способов надо исключить ройял-флеши (4 штуки) и стрит-флеши (36 штук). В результате этого число благоприятных исходов снижается до $4 \cdot C_{13}^5 - 40 = 5108$, а вероятность выпадения флеша оказывается равной $\frac{4 \cdot C_{13}^5 - 40}{C_{52}^5} = \frac{5108}{2\,598\,960} \approx 1.965 \cdot 10^{-3}$.

6) Пять последовательных значений карт можно выбрать 10 способами (от Т, 2, 3, 4, 5 до 10, В, Д, К, Т). Каждой карте можно назначить одну из четырёх мастей. По правилу произведения получаем $10 \cdot 4^5$ способов. Но в этом случае мы учли также комбинации флеш-ройяль (4 штуки) и стрит-флеш (36 штук), поэтому реальное число благоприятных исходов меньше и равно 10 200, а вероятность выпадения стрита равна $\frac{10 \cdot 4^5 - 40}{C_{52}^5} = \frac{10\,200}{2\,598\,960} \approx 3.925 \cdot 10^{-3}$.

7) Значение тройки карт, составляющих сет, можно выбрать 13 способами. Ещё два какие-то различных достоинства карт выбираются C_{12}^2 способами. Теперь назначим масти этим картам: C_4^3 способов для тройки и по 4 способа для каждой из отдельных карт. По правилу произведения получаем в общей сложности $13 \cdot C_{12}^2 \cdot C_4^3 \cdot 4 \cdot 4 = 54\,912$ благоприятных исхода, а вероятность равна $\frac{13 \cdot C_{12}^2 \cdot C_4^3 \cdot 4 \cdot 4}{C_{52}^5} = \frac{88}{4165} \approx 0.0211$.

8) Значения двух пар карт можно выбрать C_{13}^2 способами, а значение ещё одной карты — 11 способами. Теперь назначим масти этим картам: по C_4^2 для каждой пары и 4 способа для одной карты. По правилу произведения находим число благоприятных исходов $C_{13}^2 \cdot 11 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot 4 = 123\,552$ и вероятность, равную $\frac{C_{13}^2 \cdot 11 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot 4}{C_{52}^5} = \frac{198}{4165} \approx 0.0475$.

9) Значения карт в паре можно выбрать 13 способами, а значения еще трёх различных карт — C_{12}^3 способами. Далее, назначим масти этим картам: C_4^2 для пары и по 4 способа для остальных карт. По правилу произведения находим число благоприятных исходов $13 \cdot C_{12}^3 \cdot C_4^2 \cdot 4^3 = 1\,098\,240$ и вероятность, равную $\frac{13 \cdot C_{12}^3 \cdot C_4^2 \cdot 4^3}{C_{52}^5} = \frac{1760}{4165} \approx 0.4226$.

10) Различные достоинства можно выбрать C_{13}^5 способами, но здесь присутствуют 10 способов, из которых может получиться стрит или ещё более сильная комбинация типа стрит-флеш или ройял-флеш. Далее, масти можно назначить 4^5 способами, но здесь присутствуют 4 способа, когда все масти одинаковые и комбинация становится флешем. По правилу произведения находим, что число благоприятных способов равно $(C_{13}^5 - 10) \cdot (4^5 - 4) = 1\,302\,540$. Искомая вероятность составляет $\frac{(C_{13}^5 - 10) \cdot (4^5 - 4)}{C_{52}^5} = \frac{1\,302\,540}{2\,598\,960} \approx 0.5012$.

Внимание, смертельный номер! Складываем все количества благоприятных исходов из пунктов 1)-10): $4 + 36 + 624 + 3744 + 5108 + 10\,200 + 54\,912 + 123\,552 + 1\,098\,240 + 1\,302\,540 = 2\,598\,960$, что совпадает с общим числом элементарных исходов!

Ответ. 1) $\frac{4}{C_{52}^5} = \frac{1}{649\,740} \approx 1.539 \cdot 10^{-6}$; 2) $\frac{9 \cdot 4}{C_{52}^5} = \frac{3}{216\,580} \approx 1.385 \cdot 10^{-5}$; 3) $\frac{13 \cdot 48}{C_{52}^5} = \frac{1}{4165} \approx 2.4 \cdot 10^{-4}$; 4) $\frac{A_{13}^2 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{6}{4165} \approx 1.44 \cdot 10^{-3}$; 5) $\frac{4 \cdot C_{13}^5 - 40}{C_{52}^5} = \frac{5108}{2\,598\,960} \approx 1.965 \cdot 10^{-3}$; 6) $\frac{10 \cdot 4^5 - 40}{C_{52}^5} = \frac{10\,200}{2\,598\,960} \approx 3.925 \cdot 10^{-3}$; 7) $\frac{13 \cdot C_{12}^2 \cdot C_4^3 \cdot 4 \cdot 4}{C_{52}^5} = \frac{88}{4165} \approx 0.0211$; 8) $\frac{C_{13}^2 \cdot 11 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot 4}{C_{52}^5} = \frac{198}{4165} \approx 0.0475$; 9) $\frac{13 \cdot C_{12}^3 \cdot C_4^2 \cdot 4^3}{C_{52}^5} = \frac{1760}{4165} \approx 0.4226$; 10) $\frac{(C_{13}^5 - 10) \cdot (4^5 - 4)}{C_{52}^5} = \frac{1\,302\,540}{2\,598\,960} \approx 0.5012$.

3. Схема Бернулли

7. Для того, чтобы узнать, сколько в озере рыб, отлавливают 1000 рыб, метят их и выпускают обратно в озеро. Найдите все возможные варианты численности рыб в озере, для каждого из которых будет наибольшей будет наибольшей вероятность встретить среди вновь пойманных 150 рыб 10 помеченных? Считается, что после поимки рыба вновь отпускается в озеро.
Решение. Предположим, что число рыб в озере равно N. Опишем ситуацию задачи в терминах схемы Бернулли. Здесь *эксперимент* состоит в том, что исследуется вновь пойманная рыба. Такой эксперимент производится $n = 150$ раз. *Успехом* будем считать поимку помеченной рыбы. Вероятность успеха $p = 1000/N$, поскольку 1000 рыб из N в озере помечены.

Наиболее вероятное число помеченных рыб k среди $n = 150$ вновь пойманных рыб равно $k = [np + p]$, где $[x]$ означает целую часть числа x. В условии задачи сказано, что $k = 10$. Подставив значения $n = 150$ и $p = 1000/N$, получаем уравнение

$$\left[150 \cdot \frac{1000}{N} + \frac{1000}{N}\right] = 10,$$

откуда, в силу целочисленности N,

$$\left[\frac{151000}{N}\right] = 10 \Leftrightarrow 10 \le \frac{151000}{N} < 11 \Leftrightarrow 13728 \le N \le 15100.$$

По всей видимости, следует считать, что в озере около четырнадцати с половиной тысяч рыб.
Ответ. $13728 \le N \le 15100$.

8. Стоимость проезда в автобусе равна x рублей, а контролер попадается в среднем 3 раза в месяц. Каков должен быть штраф за безбилетный проезд, чтобы с вероятностью не менее 0.9 «заяц», ездящий без билета ежедневно (60 раз в месяц), имел бы расходы не меньшие, чем у «честного человека»?
Решение. *Эксперимент* — это поездка «зайца» в автобусе. Такой эксперимент повторяется $n = 60$ раз. Будем считать, что эксперимент завершился *успехом*, если попался контролер. Из условия задачи можно заключить, что вероятность успеха $p = 3/60 = 0.05$. Тогда $q = 1 - p = 0.95$.

Расходы «честного человека» в течение месяца равны $60x$ рублей. Расходы «зайца» зависят от количества успешных экспериментов.

Вероятность того, что контролер не попадется ни разу, равна

$$P_{60}(0) = C_{60}^0 p^0 q^{60} = 0.95^{60} \approx 0.046,$$

значит, вероятность, что «зайца» оштрафуют хотя бы раз, равна $1 - 0.046 = 0.954 > 0.9$.

Вероятность того, что контролер попадется ровно один раз, равна

$$P_{60}(1) = C_{60}^1 p^1 q^{59} = 60 \cdot 0.05 \cdot 0.95^{59} \approx 0.145,$$

значит, вероятность, что «зайца» оштрафуют хотя бы два раза, равна $1 - 0.046 - 0.145 = 0.809 < 0.9$.

Пусть, к примеру, штраф составляет $30x$ рублей. Тогда с вероятностью $0.046 + 0.145 = 0.191$ (контролер попался либо 0 раз, либо 1 раз) «заяц» заплатит не более $30x$ рублей, и только с вероятностью $1 - 0.046 - 0.145 = 0.809$ (контролер попался не менее двух раз) суммарный штраф составит не менее $60x$ рублей. Значит, сумма штрафа должна быть выше, чем $30x$ рублей.

Пусть теперь штраф составляет $60x$ рублей. Тогда с вероятностью 0.046 (контролер ни попался ни разу) «заяц» ничего не заплатит, и с вероятностью $1 - 0.046 = 0.954$ (контролер попался хотя бы один раз) суммарный штраф составит не менее $60x$ рублей. Значит, сумма штрафа достаточна.

Из приведенных выше примеров следует, что «заяц» имеет расходы, не меньшие, чем у «честного человека», с вероятностью не менее 0.9 в том и только том случае, когда, будучи оштрафован хотя бы один раз, «заяц» заплатит не меньше, чем «честный человек». Следовательно, штраф должен составлять $60x$ рублей (и с вероятностью 0.954 «заяц» заплатит как минимум эту сумму).
Ответ. $60x$.
9. В тесто массы $M = 1000$ кг добавляют n изюминок и делают булочки. Расход теста на каждую булочку составляет $m = 100$ г. Булочка считается «булочкой с изюмом», если в ней есть по крайней мере одна изюминка. Найдите

1) вероятность того, что наудачу взятая булочка окажется «булочкой с изюмом»;

2) приближенное значение вероятности того, что в булочке будет k изюминок;

3) n, при котором с вероятностью 0.99 наудачу взятая булочка является «булочкой с изюмом»?

Решение. Опишем ситуацию данной задачи в терминах схемы Бернулли.

Предположим, что мы занумеровали все изюминки числами от 1 до n. *Эксперимент* — это поиск i-й изюминки в той самой «наудачу выбранной булочке». Эксперимент повторяется n раз. *Успехом* будем считать обнаружение i-й изюминки. Поскольку всего имеется $M/m = 10\,000$ булочек, то вероятность успеха $p = 1/(M/m) = m/M = 0.0001$. Тогда $q = 1 - p = 1 - m/M$.

1) Событие, при котором наудачу взятая булочка окажется «булочкой с изюмом», происходит тогда и только тогда, когда количество успешных экспериментов заключено в пределах от 1 до n. Вероятность этого события равна

$$P_n(1, n) = 1 - P_n(0) = 1 - C_n^0 p^0 q^n = 1 - q^n = 1 - \left(1 - \frac{m}{M}\right)^n.$$

2) Поскольку производится большое число экспериментов (n), вероятность успех в каждом из которых мала (p), то вероятность того, что в наудачу выбранной булочке будет ровно k изюминок, хорошо может быть найдена по приближенной формуле Пуассона:

$$\mathbb{P}_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \quad \text{где } \lambda = np = \frac{nm}{M}.$$

3) Для ответа на этот вопрос задачи нужно приравнять вероятность, найденную в первом пункте к 0.99 и определить значение n:

$$1 - \left(1 - \frac{m}{M}\right)^n = 0.99 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{m}{M}\right)^n = 0.01 \Leftrightarrow n = \frac{\lg 0.01}{\lg(1 - m/M)} \approx 46\,049.$$

Ответ. 1) $1 - (1 - \frac{m}{M})^n$; 2) $\approx \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$, где $\lambda = \frac{nm}{M}$; 3) $\frac{-2}{\lg(1-m/M)} \approx 46\,049$.

10. Из таблицы случайных чисел отбирают числа, делящиеся на 3, до тех пор, пока не наберется 1025 таких чисел. Найдите приближенное значение вероятности того, что потребуется таблица, содержащая более 3000 чисел.
Решение. Опишем ситуацию задачи в терминах схемы Бернулли. Пусть имеется таблица, имеющая 3000 случайных чисел. Будем считать, что *эксперимент* — это выбор очередного случайного числа из таблицы и проверка, делится ли это число на 3. Эксперимент проводится $n = 3000$ раз. *Успехом* будем

считать кратность случайного числа трем. Вероятность успеха имеет смысл положить равной $p = 1/3$. Тогда $q = 1 - p = 2/3$.

Случайное событие

$$A = \{\text{потребуется таблица более чем из 3000 чисел}\}$$

происходит тогда и только тогда, когда происходит случайное событие

$$B = \{\text{в таблице с 3000 чисел имеется менее 1025 чисел, кратных 3}\}.$$

Вероятность события B может быть найдена как вероятность того, из 3000 экспериментов успешными оказались от 0 до 1024, так что

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = P_{3000}(0 \le k \le 1024).$$

Поскольку n велико, $\lambda = np > 10$, то используем приближенную формулу Муавра-Лапласа. Поскольку заданы границы (0 и 1024), то удобнее использовать интегральную формулу:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{0 - \frac{1}{2} - 3000 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{3000 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} = -\frac{1000.5}{\sqrt{\frac{2000}{3}}} \approx -39.2;\\
x_2 &= \frac{1024 + \frac{1}{2} - 3000 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{3000 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} = \frac{24.5}{\sqrt{\frac{2000}{3}}} \approx 0.949;\\
\Phi_0(x_1) &= -\Phi_0(39.2) \approx -0.5;\\
\Phi_0(x_2) &= \Phi_0(0.93) \approx 0.329;\\
P_{3000}(0 \le k \le 1024) &\approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) \approx 0.329 + 0.5 = 0.829.
\end{aligned}$$

Если произвести вычисления на компьютере по точной формуле Бернулли, то точный ответ этой задачи также будет равен 0.829.
Ответ. ≈ 0.829.

4. Геометрическая схема

11. Случайная точка A равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$ и делит этот отрезок на две части. Пусть η_1 — длина большей части, η_2 — длина меньшей части. Найдите $\mathbb{P}(\eta_1 < x)$, $\mathbb{P}(\eta_2 < x)$ при любом $0 \le x \le 1$.
Решение. Множество исходов Ω случайного эксперимента изобразим с помощью отрезка $[0, 1]$. Элементарный исход $\omega \in \Omega$ означает, что в качестве точки A выбрана точка с координатой ω. Эта координата однозначно определяет (случайные) величины η_1 и η_2.

Пусть, для примера, число $x = 1/5$. Тогда элементарные исходы ω, благоприятные для событий $\{\eta_1 < 1/5\}$ и $\{\eta_2 < 1/5\}$, можно изобразить в виде подмножеств отрезка $[0, 1]$.

Событие $\{\eta_1 < 1/5\}$ не имеет благоприятных исходов, так как длина большей части как минимум равна 1/2:

$$\{\eta_1 < 1/5\} = \varnothing.$$

Событие $\{\eta_2 < 1/5\}$ произойдет тогда и только тогда, когда случайная точка ω попала либо в полуинтервал $[0, 1/5)$, либо в полуинтервал $(4/5, 1]$. Поэтому

$$\{\eta_2 < 1/5\} = [0, 1/5) \cup (4/5, 1].$$

Согласно определению вероятности в геометрической схеме имеем:

$$\mathbb{P}(\eta_1 < 1/5) = \frac{\mu(\varnothing)}{\mu[0,1]} = 0, \qquad \mathbb{P}(\eta_2 < 1/5) = \frac{\mu([0,1/5) \cup (4/5,1])}{\mu[0,1]} = 2/5,$$

где μ — мера Лебега на числовой прямой. Если в качестве x взять произвольное число из отрезка $[0, 1/2]$, то рассуждения, аналогичные приведенным выше, дают:

$$\mathbb{P}(\eta_1 < x) = 0, \quad \mathbb{P}(\eta_2 < x) = 2x.$$

Пусть теперь, для примера, $x = 4/5$. Событие $\{\eta_1 < 4/5\}$ произойдет тогда и только тогда, когда случайная точка ω попадет в интервал $(1/5, 4/5)$. Событие $\{\eta_2 < 4/5\}$ происходит всегда, так как длина короткой части всегда не больше чем $1/2$. Согласно определению вероятности в геометрической схеме имеем:

$$\mathbb{P}(\eta_1 < 4/5) = \frac{\mu(1/5, 4/5)}{\mu[0,1]} = 3/5, \qquad \mathbb{P}(\eta_2 < 4/5) = \frac{\mu[0,1]}{\mu[0,1]} = 1.$$

Если в качестве x взять произвольное число из отрезка $[1/2, 1]$, то рассуждения, аналогичные приведенным выше, дают:

$$\mathbb{P}(\eta_1 < x) = 2x - 1, \quad \mathbb{P}(\eta_2 < x) = 1.$$

Ответы, полученные отдельно для $x \in [0, 1/2]$ и $x \in [1/2, 1]$ можно объединить:

$$\mathbb{P}(\eta_1 < x) = \begin{cases} 0, & x \le 1/2, \\ 2x - 1, & x > 1/2; \end{cases} \qquad \mathbb{P}(\eta_2 < x) = \begin{cases} 2x, & x \le 1/2, \\ 1, & x > 1/2. \end{cases}$$

Ответы можно записать и в более короткой форме, используя операции взятия минимума и максимума.
Ответ. $\max(0, 2x - 1)$ и $\min(2x, 1)$.

12. В шар радиуса R наудачу бросаются N точек. Найдите вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a $(0 < a < R)$.
Решение. Сначала разберемся с одной точкой, брошенной наудачу в шар. Множество исходов Ω случайного эксперимента можно изобразить в виде шара $B[R] = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| \le R\}$. Случайная точка расположена на расстоянии не меньше a от центра шара тогда и только тогда, когда она не попадает в открытый шар $B(a) = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| < a\}$. Согласно определению вероятности в геометрической схеме

$$\mathbb{P}(|\omega| \ge a) = \frac{\mu(B[R] \setminus B(a))}{\mu(B[R])} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi a^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 1 - (a/R)^3,$$

где μ — мера Лебега в $\mathbb{R}^3$.

Теперь решим задачу для N точек. Пусть событие A означает, что ближайшая точка находится на расстоянии не меньше a, а событие A_i, $i = 1, \ldots, N$, означает, что i-я точка, брошенная в шар, находится на расстоянии не меньше a. Важно заметить, что $A = A_1 \cap \ldots \cap A_N$. Поскольку события A_i можно считать независимыми, а вероятность каждого из этих событий равна $1 - (a/R)^3$, то

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_N) = \mathbb{P}(A_1) \ldots \mathbb{P}(A_N) = (1 - (a/R)^3)^N.$$

Ответ. $(1 - (a/R)^3)^N$.

5. Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса

13. В одном маленьком городке полиция разыскивает бродягу. Можно считать, что есть четыре шанса из пяти, что он находится в одном из восьми баров городка, безразлично в каком — он не отдает предпочтения ни одному из них. Двое полицейских посетили семь баров, но бродягу не обнаружили. Каковы шансы найти его в восьмом баре?
Решение. Определим два случайных события:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{бродяга в 8-м баре}\}, \\ B &= \{\text{бродяги нет в 1–7 барах}\}. \end{aligned}$$

В задаче требуется найти $\mathbb{P}(A|B)$.

Вероятность того, что бродяга находится в баре номер i, $i = 1, \ldots, 8$, равна $1/8 \cdot 4/5 = 1/10$, поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= 1 - \mathbb{P}\{\text{бродяга в одном из баров с номерами 1–7}\} \\ &= 1 - 7 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Кроме того, $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) = 1/10$, так что

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. $1/3$.

14. В магазине имеется 10 телефонов, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0.9, и 5 телефонов с аналогичной вероятностью 0.95. Найдите вероятность того, что два телефона, купленные наудачу в магазине, будут работать исправно в течение месяца.
Решение. В задаче требуется найти вероятность события

$$A = \{\text{два телефона будут работать исправно}\}.$$

Введем полную группу событий:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{каждый телефон имеет надежность 0.9}\}, \\ H_2 &= \{\text{каждый телефон имеет надежность 0.95}\}, \\ H_3 &= \{\text{один телефон имеет надежность 0.9}, \\ &\quad \text{а второй — надежность 0.95}\}. \end{aligned}$$

Вероятности гипотез можно найти с помощью гипергеометрического распределения. Всего 15 объектов, из них 10 имеют первый тип (надежность 0.9), 5 имеют второй тип (надежность 0.95), извлекаются два объекта.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_1) &= \frac{C_{10}^2 C_5^0}{C_{15}^2} = \frac{45}{105}, \\ \mathbb{P}(H_2) &= \frac{C_{10}^0 C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{10}{105}, \\ \mathbb{P}(H_3) &= \frac{C_{10}^1 C_5^1}{C_{15}^2} = \frac{50}{105}. \end{aligned}$$

Условные вероятности $\mathbb{P}(A|H_i)$ легко найти, поскольку теперь известно, с какими вероятностями будет работать каждый из телефонов в течение месяца, а выход одного телефона из строя не зависит от работы другого:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|H_1) &= 0.9 \cdot 0.9 = 0.81 = \frac{324}{400}, \\
\mathbb{P}(A|H_2) &= 0.95 \cdot 0.95 = 0.9025 = \frac{361}{400}, \\
\mathbb{P}(A|H_3) &= 0.9 \cdot 0.95 = 0.855 = \frac{342}{400}.
\end{aligned}$$

По формуле полной вероятности находим ответ:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2) + \mathbb{P}(H_3)\mathbb{P}(A|H_3) \\
&= \frac{45}{105} \cdot \frac{324}{400} + \frac{10}{105} \cdot \frac{361}{400} + \frac{50}{105} \cdot \frac{342}{400} \\
&= \frac{35290}{42000} = \frac{3529}{4200} \approx 0.8402.
\end{aligned}$$

Ответ. $\frac{3529}{4200} \approx 0.8402$.

15. Два охотника одновременно и независимо стреляют в кабана. Известно, что первый попадает с вероятностью 0.8, а второй с вероятностью 0.4. Кабан убит, и в нём обнаружена одна пуля. Как делить кабана?

Решение. Эта задача на использование формулы Байеса, поскольку *в формулировке явно приводится результат случайного эксперимента.* Кабана имеет смысл делить пропорционально *условным* вероятностям того, что пуля принадлежит каждому из охотников.

Пусть

$$A = \{\text{в кабане обнаружена одна пуля}\}.$$

Введем полную группу событий:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{\text{никто из охотников не попал в кабана}\}, \\
H_2 &= \{\text{первый охотник попал, а второй — нет}\}, \\
H_3 &= \{\text{второй охотник попал, а первый — нет}\}, \\
H_4 &= \{\text{оба охотника попали в кабана}\}.
\end{aligned}$$

(Вообще-то $A \subset H_2 \cup H_3$, так что гипотезы H_1 и H_4 можно было и не вводить, но работать с полной группой событий приятнее.)

Вероятности гипотез рассчитываются на основе вероятностей попаданий и промахов для каждого из охотников с использованием независимости. Условные вероятности $\mathbb{P}(A|H_i)$ равны нулю или единице, в зависимости от гипотезы. Запишем численные значения этих вероятностей:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_1) &= 0.2 \cdot 0.6 = 0.12, \quad \mathbb{P}(A|H_1) = 0; \\
\mathbb{P}(H_2) &= 0.8 \cdot 0.6 = 0.48, \quad \mathbb{P}(A|H_2) = 1; \\
\mathbb{P}(H_3) &= 0.2 \cdot 0.4 = 0.08, \quad \mathbb{P}(A|H_3) = 1; \\
\mathbb{P}(H_4) &= 0.8 \cdot 0.4 = 0.32, \quad \mathbb{P}(A|H_4) = 0.
\end{aligned}$$

Находим условные вероятности $\mathbb{P}(H_2|A)$ и $\mathbb{P}(H_3|A)$, пропорционально которым имеет смысл делить кабана, по формуле Байеса:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_2|A) &= \frac{\mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)}{\sum_i \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)} = \frac{0.48}{0.56} = \frac{6}{7},\\ \mathbb{P}(H_3|A) &= \frac{\mathbb{P}(H_3)\mathbb{P}(A|H_3)}{\sum_i \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)} = \frac{0.08}{0.56} = \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

Ответ. В пропорции 6:1.

6. Распределения случайных величин

16. Плотность распределения величины ξ имеет вид $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ c/x^4, & x \geq 1. \end{cases}$ Найдите:

а) постоянную c;

б) функцию распределения F_ξ;

в) $\mathbb{P}(\xi = 2)$;

г) $\mathbb{P}(0.5 < \xi < 3)$;

д) функцию распределения F_η и плотность p_η, если $\eta = 1/\xi$;

е) $\mathbb{P}(0.1 < \eta < 0.3)$.

Решение. а) Поскольку $1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\,dx = \int\limits_{1}^{\infty} cx^{-4}\,dx = \frac{cx^{-3}}{-3}\Big|_1^\infty = \frac{c}{3}$, то $c = 3$.

б) $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(y)\,dy$. Если $x \leq 1$, то $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dy = 0$. Если $x > 1$, то $F_\xi(x) = \int\limits_{1}^{x} 3y^{-4}\,dy = (-y^{-3})\Big|_1^x = 1 - x^{-3}$.

в) $\mathbb{P}(\xi = 2) = \int\limits_{2}^{2} p_\xi(x)\,dx = 0$. И вообще, вероятность того, что абсолютно непрерывная величина принимает заданное значение $x \in \mathbb{R}$, равна нулю.

г) $\mathbb{P}(0.5 < \xi < 3) = \mathbb{P}(0.5 \leq \xi < 3) = F_\xi(3) - F_\xi(0.5) = (1 - 3^{-3}) - 0 = 26/27$.

д) $F_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(1/\xi < x) = \mathbb{P}(\xi x > 1)$, поскольку ξ принимает только положительные значения.

Если $x = 0$, то $\mathbb{P}(0 > 1) = 0$. Если $x < 0$, то $\{\xi x > 1\}$ — невозможное событие. Таким образом, $F_\eta(x) = 0$ при $x \leq 0$.

Если $x > 0$, то

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi x > 1) &= \mathbb{P}(\xi > 1/x) = 1 - \mathbb{P}(\xi \leq 1/x) = 1 - F_\xi(1/x)\\ &= \begin{cases} 1 - 0, & 1/x \leq 1, \\ 1 - (1 - (1/x)^{-3}), & 1/x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \geq 1, \\ x^3, & x < 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Собрав вместе ответы всех рассмотренных случаев, получим

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Плотность $p_\eta(x)$ находится дифференцированием:

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Плотность p_η можно найти еще одним способом. Так как ξ принимает значения только на множестве $[1, \infty)$, а функция $g(x) = 1/x$ на этом множестве строго монотонна, дифференцируема и отображает его в полуинтервал $(0, 1]$, то плотность равна

$$p_\eta(y) = p_\xi(g^{-1}(y)) \cdot \left|[g^{-1}(y)]'\right|.$$

В нашем случае $g^{-1}(y) = 1/y$, так что

$$p_\eta(y) = 3 \cdot (1/y)^{-4} \cdot \left|(1/y)'\right| = 3y^4 \cdot |-1/y^2| = 3y^2, \quad 0 < y < 1.$$

е) $\mathbb{P}(0.1 < \eta < 0.3) = F_\eta(0.3) - F_\eta(0.1) = 0.3^3 - 0.1^3 = 0.026.$

Ответ. а) $c = 3$; б) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 1 - x^{-3}, & x > 1; \end{cases}$ в) 0; г) 26/27; д) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$ $p_\eta(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$ е) 0.026.

17. Величина ξ имеет распределение Коши с плотностью $p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найдите плотность распределения величин $\eta = \frac{1}{\xi}$, $\zeta_1 = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}$, $\zeta_2 = \frac{1}{1+\xi^2}$.

Решение. а) Для нахождения плотности p_η заметим, что функция $g(x) = 1/x$ строго монотонна на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, дифференцируема и обратима. Поэтому

$$p_\eta = p_\xi(g^{-1}(y)) \cdot \left|[g^{-1}(y)]'\right| = \frac{1}{\pi(1 + 1/y^2)} \cdot \left|\frac{-1}{y^2}\right| = \frac{1}{\pi(1 + y^2)}.$$

Таким образом, $\eta = 1/\xi$ также имеет распределение Коши.

б) Функция $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ отображает $\mathbb{R}$ на множество $[0, 1)$. Для любого $0 \le y < 1$ найдем прообразы x_i:

$$y = \frac{x^2}{1 + x^2} \Leftrightarrow y(1 + x^2) = x^2 \Leftrightarrow y = (1 - y)x^2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{y}{1 - y}}.$$

Производная $g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$. По формуле для плотности находим:

$$\begin{aligned} p_{\zeta_1}(y) &= p_\xi(x_1) \cdot \left|\frac{1}{g'(x_1)}\right| + p_\xi(x_2) \cdot \left|\frac{1}{g'(x_2)}\right| \\ &= \frac{1}{\pi(1 + x_1^2)} \cdot \frac{(1 + x_1^2)}{2|x_1|} + \frac{1}{\pi(1 + x_2^2)} \cdot \frac{(1 + x_2^2)}{2|x_2|} \\ &= \frac{1 + x_1^2}{\pi|x_1|} = \frac{1 + \frac{y}{1-y}}{\pi\sqrt{\frac{y}{1-y}}} = \frac{1}{\pi\sqrt{y(1 - y)}}. \end{aligned}$$

Вычисления для плотности величины ζ_2 аналогичны.
Ответ. $p_\eta = p_\xi$; $p_{\zeta_1}(x) = p_{\zeta_2}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$, $0 < x < 1$.
18. Величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Найдите функцию распределения и плотность $\xi_1 + \xi_2$.
Решение. Применим формулу

$$F_{g(\xi_1,\xi_2)}(z) = \iint\limits_{\{g(x,y)<z\}} p_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\,dx\,dy.$$

для функции $g(x,y) = x+y$. В дополнение к этому воспользуемся независимостью абсолютно непрерывных случайных величин ξ_1 и ξ_2, которая влечет равенство $p_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y)$. Имеем:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \iint\limits_{\{x+y<z\}} p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y)\,dx\,dy.$$

Здесь $p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = 1$ при $0 \le x \le 1$ и 0 в остальных случаях.

Имея в виду, что величины ξ_1 и ξ_2 принимают значения только на отрезке $[0,1]$, рассмотрим четыре случая.

Если $z \le 0$, то $p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y) = 0$ на множестве $\{x+y<z\}$, поэтому $F_{\xi_1+\xi_2}(z) = 0$.

Если $0 < z \le 1$, та часть множества $\{x+y<z\}$, где $p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y) > 0$ представима в виде $\{(x,y) : 0 \le x < z, 0 \le y < z-x\}$, поэтому

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int_0^z \int_0^{z-x} 1\cdot 1\,dx\,dy = z^2/2.$$

Если $1 < z \le 2$, то аналогичным образом получим:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = 1 - (2-z)^2/2.$$

Если $z > 2$, то $F_{\xi_1+\xi_2}(z) = 1$, поскольку из пары неравенств $\xi_1 \le 1$ и $\xi_2 \le 1$ вытекает, что $\xi_1+\xi_2$ всегда не больше 2, а значит, меньше z.

Собрав вместе все полученные результаты, можно записать единую формулу для $F_{\xi_1+\xi_2}(z)$. Плотность $p_{\xi_1+\xi_2}(z)$ находится дифференцированием.
Ответ.

$$\begin{aligned} F_{\xi_1+\xi_2}(z) &= \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ z^2/2, & 0 < z \le 1, \\ 1-(2-z)^2/2, & 1 < z \le 2, \\ 1, & z > 2, \end{cases} \\ p_{\xi_1+\xi_2}(z) &= \begin{cases} z, & 0 < z \le 1, \\ 2-z, & 1 < z \le 2, \\ 0, & z \le 0 \text{ или } z > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

19. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одну и ту же функцию распределения $F(x)$. Найдите функцию распределения случайных величин $\eta = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\zeta = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Решение. Заметим, что $\max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ будет меньше x тогда и только тогда, когда *каждая* из величин будет меньше x. Используя определение функции распределения и независимость случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, запишем:

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= \mathbb{P}(\max(\xi_1, \ldots, \xi_n) < x) = \mathbb{P}(\xi_1 < x, \ldots, \xi_n < x) \\ &= \mathbb{P}(\xi_1 < x) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\xi_n < x) = F^n(x). \end{aligned}$$

Аналогично поступим для минимума:

$$\begin{aligned} F_\zeta(x) &= \mathbb{P}(\min(\xi_1, \ldots, \xi_n) < x) = 1 - \mathbb{P}(\min(\xi_1, \ldots, \xi_n) \geq x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\xi_1 \geq x, \ldots, \xi_n \geq x) = 1 - \mathbb{P}(\xi_1 \geq x) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\xi_n \geq x) \\ &= 1 - (1 - F(x))^n. \end{aligned}$$

Ответ. $F_\eta(x) = F^n(x)$, $F_\zeta(x) = 1 - (1 - F(x))^n$.

20. Случайный вектор (ξ, η) имеет плотность

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} A, & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Найдите значение постоянной A и одномерные плотности p_ξ и p_η. Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

Решение. Для нахождения постоянной A вычислим интеграл от плотности $p_{\xi,\eta}(x, y)$ по множеству $\mathbb{R}^2$. Поскольку $p_{\xi,\eta}(x, y) = 0$ вне круга $x^2 + y^2 \leq R^2$, а внутри круга плотность постоянна и равна A, то значение интеграла получится равным произведению A и площади круга πR^2. Поскольку в ответе должна выйти единица, то $A \cdot \pi R^2 = 1$ и $A = \frac{1}{\pi R^2}$.

Для нахождения одномерной плотности $p_\xi(x)$ проинтегрируем плотность $p_{\xi,\eta}(x, y)$ по переменной y. Если $|x| > R$, то $p_{\xi,\eta}(x, y) = 0$, и интеграл будет равен 0. Если $|x| \leq R$, то $p_{\xi,\eta}(x, y) > 0$ только при $|y| \leq \sqrt{R^2 - x^2}$, и интеграл $\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} A\, dy = \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}$. Одномерная плотность $p_\eta(y)$ в силу симметрии имеет тот же вид.

Плотности $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$ отличны от нуля при $-R < x < R$ и $-R < y < R$. Если предположить независимость случайных величин ξ и η, то при $(x, y) \in (-R, R) \times (-R, R)$ плотность $p_{\xi,\eta}(x, y)$ должна быть ненулевой. Однако, плотность $p_{\xi,\eta}(x, y)$ отлична от нуля только лишь внутри круга $x^2 + y^2 \leq R^2$. Это означает, что ξ и η зависимы.

Ответ. $A = \frac{1}{\pi R^2}$; $p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & |x| \leq R, \\ 0, & |x| > R; \end{cases}$ нет.

21. Случайный вектор (ξ, η) имеет абсолютно непрерывное распределение. Его функция распределения имеет вид:

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0, \\ 1 - e^{-x^2} - e^{-2y} + e^{-x^2-2y}, & x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

Найдите

а) совместную плотность распределения $p_{\xi,\eta}(x, y)$;

б) вероятности $\mathbb{P}(-2 \leq \xi < 2,\ 1 \leq \eta < 3)$, $\mathbb{P}(\xi \geq 0,\ \eta \geq 1)$, $\mathbb{P}(\xi < 1,\ \eta \geq 2)$;

в) функции распределения F_ξ и F_η.

Являются ли величины ξ и η независимыми?
Решение. а) Совместная плотность распределения $p_{\xi,\eta}(x,y)$ находится путем вычисления частной производной второго порядка от функции распределения $F_{\xi,\eta}(x,y)$ по переменным x и y:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0, \\ 4xe^{-x^2-2y}, & x > 0,\, y > 0. \end{cases}$$

б) $\mathbb{P}(-2 \le \xi < 2,\, 1 \le \eta < 3)$ вычисляется через функцию совместного распределения следующим образом (см. соответствующий раздел «Предварительные сведения»):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-2 \le \xi < 2,\, 1 \le \eta < 3) &= F_{\xi,\eta}(2,3) - F_{\xi,\eta}(-2,3) - F_{\xi,\eta}(2,1) + F_{\xi,\eta}(-2,1) \\ &= e^{-2} - 2e^{-6} + e^{-10}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi \ge 0,\, \eta \ge 1) &= F_{\xi,\eta}(\infty,\infty) - F_{\xi,\eta}(0,\infty) - F_{\xi,\eta}(\infty,1) + F_{\xi,\eta}(0,1) \\ &= e^{-2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi < 1,\, \eta \ge 2) &= F_{\xi,\eta}(1,\infty) - F_{\xi,\eta}(1,2) - F_{\xi,\eta}(-\infty,\infty) + F_{\xi,\eta}(-\infty,2) \\ &= e^{-4} - e^{-5}. \end{aligned}$$

в) Одномерные функции распределения могут быть найдены следующим образом:

$$\begin{aligned} F_\xi(x) &= \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(\xi < x,\, \eta < \infty) = F_{\xi,\eta}(x,\infty), \\ F_\eta(y) &= \mathbb{P}(\eta < y) = \mathbb{P}(\xi < \infty,\, \eta < y) = F_{\xi,\eta}(\infty,y). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-x^2}, & x > 0; \end{cases} \qquad F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 1 - e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$$

Поскольку $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$, то, согласно критерию независимости в терминах функций распределения, величины ξ и η независимы.
Ответ. а) $p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0, \\ 4xe^{-x^2-2y}, & x > 0,\, y > 0; \end{cases}$ б) $e^{-2} - 2e^{-6} + e^{-10}$, e^{-2}, $e^{-4} - e^{-5}$;
в) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-x^2}, & x > 0; \end{cases}$ $F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ 1 - e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$ Да.

7. Математическое ожидание и дисперсия дискретных случайных величин

22. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Докажите, что $\mathbb{E}\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi \ge i)$.

Решение. По определению математического ожидания

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi &= \mathbb{P}(\xi = 1) + 2\mathbb{P}(\xi = 2) + 3\mathbb{P}(\xi = 3) + \dots \\
&= \mathbb{P}(\xi = 1) + \mathbb{P}(\xi = 2) + \mathbb{P}(\xi = 3) + \dots \\
&\qquad\qquad\quad + \mathbb{P}(\xi = 2) + \mathbb{P}(\xi = 3) + \dots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \mathbb{P}(\xi = 3) + \dots \\
&= \mathbb{P}(\xi \geq 1) + \mathbb{P}(\xi \geq 2) + \mathbb{P}(\xi \geq 3) + \dots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi \geq i).
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathbb{E}\xi < \infty$, то перегруппировка слагаемых ряда не изменяет ответ.

23. Большое число N людей сдают анализ крови. Исследование может быть организовано двумя способами.

1) Кровь каждого человека исследуется отдельно. Требуется провести N анализов.
2) Кровь k человек смешивается и анализируется полученная смесь. Если результат отрицателен, то достаточно одного анализа для этих k человек. Если результат положителен, то кровь каждого исследуется отдельно, и всего нужно провести $k+1$ анализ.

Считая, что вероятность положительного результата равна p,

а) найдите вероятность положительного результата в группе из k человек;

б) найдите математическое ожидание числа анализов при втором способе исследования;

в) определите оптимальное значение k для $p = 0.05$.

Решение. а) Анализ отдельного человека дает отрицательный результат с вероятностью $1-p$. Поскольку разумно считать результаты анализов для отдельных людей независимыми, то вероятность получения отрицательного анализа для группы из k человек равна $(1-p)^k$. Значит, вероятность положительного анализа для группы равна $1-(1-p)^k$.

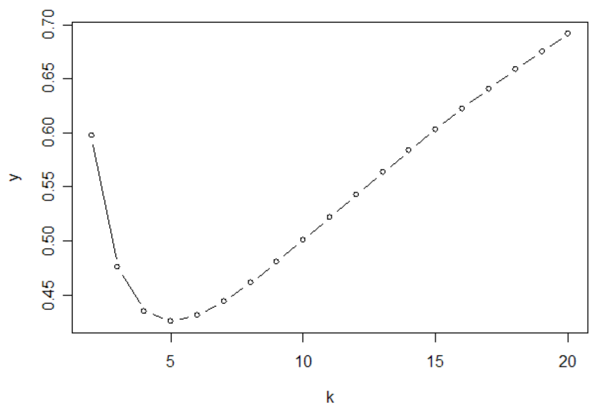
б) Из N человек можно составить N/k групп по k человек (для простоты будем считать, что N делится нацело на k). Пусть ξ_i обозначает число анализов, потребовавшихся для i-й группы. Из результата пункта а) следует, что распределение ξ_i имеет вид:

ξ_i	1	$k+1$
$\mathbb{P}$	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

откуда $\mathbb{E}\xi_i = 1\cdot(1-p)^k + (k+1)\cdot(1-(1-p)^k) = k+1-k(1-p)^k$. Поскольку математическое ожидание линейно, то среднее число анализов, которое потребуется для всех N/k групп, равно

$$\frac{N}{k}\cdot(k+1-k(1-p)^k) = N\left(1+\frac{1}{k}-(1-p)^k\right).$$

в) Для $p = 0.05$ математическое ожидание равно $N(1+\frac{1}{k}-0.95^k)$. Построив график функции $y = 1+\frac{1}{k}-0.95^k$, видим, что минимальное значение достигается при $k=5$ и приблизительно равно 0.426. Таким образом, объединение людей в группы по 5 человек в каждой дает экономию около 60%.



Ответ. а) $1-(1-p)^k$; б) $N(1+\frac{1}{k}-(1-p)^k)$; в) 5.

24. Согласно законам о трудоустройстве в городе N, наниматели обязаны предоставлять всем рабочим выходной, если хотя бы у одного из них день рождения, и принимать на работу независимо от дня рождения. За исключением этих выходных, рабочие трудятся весь год из 365 дней. Наниматель хочет максимизировать среднее число человеко-дней в году. Сколько для этого нужно нанять рабочих? Найдите также среднее число выходных дней в году в этом случае.

Решение. Пусть w_n — число выходных дней в году, если нанято n рабочих. Введём случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{365}$, где ξ_i равно нулю, если i-й день в году является рабочим, и единице, если i-й день в году является выходным. Тогда $w_n = \xi_1 + \ldots + \xi_{365}$.

Сначала найдём распределение ξ_i и соответствующее математическое ожидание. Рассмотрим схему Бернулли, где проводится n независимых экспериментов (n есть число нанятых рабочих), каждый из которых состоит в проверке того, попал ли день рождения очередного рабочего именно на i-й день года. Вероятность успеха здесь равна $p = \frac{1}{365}$, а вероятность неудачи $q = \frac{364}{365}$. Событие $\{\xi_i = 0\}$ происходит тогда и только тогда, когда в серии из n экспериментов будет 0 успешных (все дни рождения попали на какие-то другие дни года). Таким образом,

$$\mathbb{P}(\xi_i = 0) = P_n(0) = q^n = \left(\frac{364}{365}\right)^n.$$

Далее,

$$\mathbb{P}(\xi_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(\xi_i = 0) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n,$$

и распределение ξ_i имеет вид:

ξ_i	0	1
$\mathbb{P}$	$\left(\frac{364}{365}\right)^n$	$1-\left(\frac{364}{365}\right)^n$

Математическое ожидание

$$\mathbb{E}\xi_i = 0 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^n + 1 \cdot \left(1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n\right) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n,$$

поэтому

$$\mathbb{E}w_n = \mathbb{E}\xi_1 + \ldots + \mathbb{E}\xi_{365} = 365\left(1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n\right).$$

Среднее число человеко-дней в году, если нанято n рабочих, равно

$$(365 - \mathbb{E}w_n)n = 365n\left(\frac{364}{365}\right)^n \to \max.$$

Производная функции $x\left(\frac{364}{365}\right)^x$ равна $\left(\frac{364}{365}\right)^x + x\left(\frac{364}{365}\right)^x \ln\frac{364}{365}$ и обращается в нуль при $x = \frac{-1}{\ln(364/365)} \approx 364.5$, значит, минимум функции достигается при $n = 364$ или $n = 365$. Значения функции при таких n совпадают и равны $365 \cdot 364 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{364} \approx 48943.52$. Таким образом, количество рабочих дней в среднем составляет $365 \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^{364} \approx 134.46$, а выходных — $365 - 134.46 = 230.54$.
Ответ. 364 человека, ≈ 231 выходной день.

8. Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывных случайных величин

25. Сторона квадрата, имеющая длину a, измерена с погрешностью ξ, которая равномерно распределена на отрезке $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Найдите среднее значение и дисперсию площади квадрата S, вычисленной по результату измерения.
Решение. Площадь $S = (a+\xi)^2$, где $\xi \sim \mathrm{Unif}[-\varepsilon, \varepsilon]$. По формуле математического ожидания функции от случайной величины находим:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}S &= \int_{-\infty}^{\infty}(a+x)^2 p_\xi(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(a+x)^2\frac{1}{2\varepsilon}\,dx = \frac{1}{2\varepsilon}\cdot\frac{(a+x)^3}{3}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \\
&= \frac{(a+\varepsilon)^3 - (a-\varepsilon)^3}{6\varepsilon} = a^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^2, \\
\mathbb{E}S^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}(a+x)^4 p_\xi(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(a+x)^4\frac{1}{2\varepsilon}\,dx = \frac{1}{2\varepsilon}\cdot\frac{(a+x)^5}{5}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \\
&= \frac{(a+\varepsilon)^5 - (a-\varepsilon)^5}{10\varepsilon} = a^4 + 2a^2\varepsilon^2 + \frac{1}{5}\varepsilon^4, \\
\operatorname{Var} S &= \mathbb{E}S^2 - (\mathbb{E}S)^2 = a^4 + 2a^2\varepsilon^2 + \frac{1}{5}\varepsilon^4 - \left(a^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^2\right)^2 = \frac{4}{3}a^2\varepsilon^3 + \frac{4}{45}\varepsilon^4.
\end{aligned}$$

Ответ. $\mathbb{E}S = a^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^2$, $\operatorname{Var} S = \frac{4}{3}a^2\varepsilon^2 + \frac{4}{45}\varepsilon^4$.

26. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\eta = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\zeta = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Найдите $\mathbb{E}\eta$, $\mathbb{E}\zeta$, $\operatorname{Var}\eta$, $\operatorname{Var}\zeta$.
Решение. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеют общую функцию распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Случайная величина η имеет функцию распределения

$$
\begin{aligned}
F_\eta(x) &= \mathbb{P}(\max(\xi_1,\dots,\xi_n) < x) = \mathbb{P}(\xi_1 < x,\dots,\xi_n < x) = \\
&= |\text{независимость}| = \mathbb{P}(\xi_1 < x)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(\xi_n < x) = \\
&= F_\xi^n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^n, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

и плотность

$$
p_\eta(x) = F'_\eta(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}
$$

Находим $\mathbb{E}\eta$, $\mathbb{E}\eta^2$ и $\operatorname{Var}\eta$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_\eta(x)\,dx = \int_0^1 x\,nx^{n-1}\,dx = n\int_0^1 x^n\,dx = \frac{n}{n+1}, \\
\mathbb{E}\eta^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\eta(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,nx^{n-1}\,dx = n\int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{n}{n+2}, \\
\operatorname{Var}\zeta &= \mathbb{E}\zeta^2 - (\mathbb{E}\zeta)^2 = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.
\end{aligned}
$$

Вычисления для ζ аналогичны:

$$
\begin{aligned}
F_\zeta(x) &= 1 - \mathbb{P}(\min(\xi_1,\dots,\xi_n) \ge x) = 1 - \mathbb{P}(\xi_1 \ge x,\dots,\xi_n \ge x) = \\
&= 1 - (1 - F_\xi(x))^n = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1-(1-x)^n, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases} \\
p_\zeta(x) &= \begin{cases} n(1-x)^{n-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \\
\mathbb{E}\zeta &= \int_0^1 x\,n(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{1}{n+1}, \\
\mathbb{E}\zeta^2 &= \int_0^1 x^2\,n(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{2}{(n+1)(n+2)}, \\
\operatorname{Var}\eta &= \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\eta)^2 = \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.
\end{aligned}
$$

Ответ. $\mathbb{E}\eta = \frac{n}{n+1}$, $\mathbb{E}\zeta = \frac{1}{n+1}$, $\operatorname{Var}\eta = \operatorname{Var}\zeta = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.

9. Ковариация и корреляция

27. Случайная точка с координатами (ξ,η) равномерно распределена в треугольнике с вершинами в точках с координатами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$. Найдите совместную плотность распределения $p_{\xi,\eta}(x,y)$, одномерные плотности $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$ и вычислите ковариацию $\operatorname{Cov}(\xi,\eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$. Согласуется ли знак $\rho(\xi,\eta)$ с вашими представлениями о характере зависимости ξ и η?

Решение. Поскольку точка распределена *равномерно*, то совместная плотность $p_{\xi,\eta}(x,y)$ равна положительной константе, если точка (x,y) попадает в треугольник $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1)$, и нулю в остальных случаях. Поскольку двойной интеграл от совместной плотности по треугольнику должен равняться единице, то константа равна $1/S_\Delta$, где $S_\Delta = 1/2$ — площадь треугольника. Таким образом,

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 2, & x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Находим одномерные плотности:

$$\begin{aligned}
p_\xi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ или } x > 1, \\ \int\limits_0^{1-x} 2\,dy, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ или } x > 1, \\ 2-2x, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \\
p_\eta(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx = \begin{cases} 0, & y < 0 \text{ или } y > 1, \\ \int\limits_0^{1-y} 2\,dx, & 0 \leq y \leq 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & y < 0 \text{ или } y > 1, \\ 2-2y, & 0 \leq y \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Вычисляем моменты первого и второго порядка и дисперсии:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx = \int_0^1 x(2-2x)\,dx = \frac{1}{3}, \\
\mathbb{E}\xi^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x)\,dx = \int_0^1 x^2(2-2x)\,dx = \frac{1}{6}, \\
\operatorname{Var}\xi &= \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}, \\
\mathbb{E}\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} y p_\eta(y)\,dy = \int_0^1 y(2-2y)\,dy = \frac{1}{3}, \\
\mathbb{E}\eta^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_\eta(y)\,dy = \int_0^1 y^2(2-2y)\,dy = \frac{1}{6}, \\
\operatorname{Var}\eta &= \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\eta)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}, \\
\mathbb{E}\xi\eta &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy \cdot 2\,dy \right) dx = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Теперь находим ковариацию и коэффициент корреляции:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(\xi,\eta) &= \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{36}, \\
\rho(\xi,\eta) &= \frac{\operatorname{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\operatorname{Var}\xi \operatorname{Var}\eta}} = \frac{-1/36}{1/18} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Поскольку при бóльших значениях координаты ξ более вероятны меньшие значения координаты η, то отрицательное значение коэффициента корреляции было ожидаемо.

Ответ. $p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 2, & x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$

$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ или } x > 1, \\ 2-2x, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$ $p_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \text{ или } y > 1, \\ 2-2y, & 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$ $\operatorname{Cov}(\xi,\eta) = -1/36$, $\rho(\xi,\eta) = -1/2$.

28. Некоторая величина отклоняется от своего среднего значения под воздействием двух случайных факторов A и B. Стандартное отклонение, вызванное фактором A, равно 1.2, а фактором B — 1.1. Коэффициент корреляции между этими уклонениями равен $1/3$. Найдите стандартное уклонение, вызываемое совместным действием обоих факторов.

Решение. Пусть случайные величины ξ и η равны уклонениям, вызванным факторами A и B. Тогда по условию задачи $\mathbb{E}\xi = 0$, $\operatorname{Var}\xi = \mathbb{E}\xi^2 = 1.2^2$, $\mathbb{E}\eta = 0$, $\operatorname{Var}\eta = \mathbb{E}\eta^2 = 1.1^2$, $\rho(\xi,\eta) = 1/3$. Вычислим дисперсию уклонения, вызванного совместным действием обоих факторов:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(\xi+\eta) &= \mathbb{E}(\xi+\eta)^2 = \mathbb{E}\xi^2 + 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta + \mathbb{E}\eta^2 \\ &= \operatorname{Var}\xi + \operatorname{Var}\eta + 2\rho(\xi,\eta)\sqrt{\operatorname{Var}\xi\operatorname{Var}\eta} \\ &= 1.2^2 + 1.1^2 + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 1.2\cdot 1.1 = 3.53, \end{aligned}$$

поэтому стандартное отклонение будет составлять $\sqrt{3.53} \approx 1.88$.

Ответ. $\sqrt{1.2^2 + 1.1^2 + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 1.2\cdot 1.1} \approx 1.88$.

10. Условные распределения и математические ожидания

29. Пусть пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, вероятность задана соотношениями $\mathbb{P}(\omega_i) = 1/6$, $i = 1, \ldots, 6$, а случайные величины ξ и η определены правилами:

$$\xi(\omega_i) = i, \qquad \eta(\omega_1) = \eta(\omega_3) = \eta(\omega_5) = 1, \quad \eta(\omega_2) = \eta(\omega_4) = 2, \quad \eta(\omega_6) = 3.$$

1) Найдите распределения ξ и η.

2) Вычислите математическое ожидание ξ.

3) Запишите таблицу совместного распределения (ξ,η).

4) Запишите условные распределения ξ относительно событий $\{\eta = 1\}$, $\{\eta = 2\}$ и $\{\eta = 3\}$.

5) Найдите условные математические ожидания $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 1)$, $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 2)$, $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 3)$ и сравните их с $\mathbb{E}\xi$.

6) Найдите распределение условного математического ожидания $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$.

7) Проверьте формулу полной вероятности.

Решение.

1) Распределения ξ и η находятся по вероятностям элементарных исходов и значениям, принимаемым случайными величинами:

ξ	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

η	1	2	3
$\mathbb{P}$	$3/6$	$2/6$	$1/6$

2) $\mathbb{E}\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$.

3) Выпишем значения, которые могут приниматься величиной ξ (индекс строки таблицы), и значения величины η (индекс столбца таблицы), после чего перебором элементарных исходов выясним, какие получатся пары значений случайного вектора (ξ, η) и добавим в соответствующие клетки таблицы вероятности этих элементарных исходов.

$\xi \setminus \eta$	1	2	3
1	$1/6$	0	0
2	0	$1/6$	0
3	$1/6$	0	0
4	0	$1/6$	0
5	$1/6$	0	0
6	0	0	$1/6$

4) Для формирования условного распределения относительно события $\{\eta = 1\}$ выделим из таблицы столбец, соответствующий $\eta = 1$. Пересчитаем каждое число по формуле $p_{i|1} = \frac{p_{i1}}{p_{\cdot 1}}$. После такого нормирования (пропорциональное изменения чисел, чтобы их сумма стала равной единице) в результате получим условное распределение (записанное в строчку):

$\xi \mid \eta = 1$	1	3	5
$\mathbb{P}$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Аналогично находятся остальные два распределения:

$\xi \mid \eta = 2$	2	4
$\mathbb{P}$	$1/2$	$1/2$

$\xi \mid \eta = 3$	6
$\mathbb{P}$	1

5) Исходя из условных распределений, найденных в предыдущем пункте, рассчитаем условные математические ожидания:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 1) &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} = 3, \\
\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 2) &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3, \\
\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 3) &= 6 \cdot 1 = 6.
\end{aligned}$$

Ни одно из условных математических ожиданий не совпадает с безусловным $\mathbb{E}\xi = \frac{7}{2}$.

6) Условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$ — это случайная величина, принимающая значения $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 1)$, $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 2)$ и $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 3)$ с теми же вероятностями, с которыми η принимает значения 1, 2 и 3. Таким образом, распределение случайной величины $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$ имеет вид:

$\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$	3	6
$\mathbb{P}$	$5/6$	$1/6$

где $5/6 = \mathbb{P}(\eta = 1) + \mathbb{P}(\eta = 2)$.

7) Найдем математическое ожидание случайной величины $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$ и сравним ответ со значением $\mathbb{E}\xi$:

$$\mathbb{E}\mathbb{E}(\xi \mid \eta) = 3 \cdot \frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = \mathbb{E}\xi.$$

30. Некоторое насекомое откладывает случайное число яиц η, распределенное по закону Пуассона $\mathrm{Pois}(\lambda)$. Через некоторое время каждое яйцо независимо от других превращается в личинку с вероятностью $p > 0$. Пусть ξ — количество появившихся личинок. Найдите распределение и среднюю численность потомства.
Решение. Если бы количество отложенных яиц было не случайной величиной η, а фиксированным числом n, то можно было бы легко установить распределение потомства. В связи с этим рассчитаем условную вероятность $\mathbb{P}(\xi = k \mid \eta = n)$.

Поскольку превращение отдельного яйца в личинку можно описать одним экспериментом схемы Бернулли, то $\mathbb{P}(\xi = k \mid \eta = n) = C_n^k p^k q^{n-k}$ при $0 \le k \le n$. Среднее число личинок $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = n) = np$, поскольку это математическое ожидание биномиальной случайной величины. Условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi \mid \eta) = \eta p$. По формуле полной вероятности для условных математических ожиданий находим:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\mathbb{E}(\xi \mid \eta) = \mathbb{E}\eta p = \lambda p,$$

где использовался тот факт, что математическое ожидание пуассоновской случайной величины $\mathrm{Pois}(\lambda)$ равно значению параметра λ.

Распределение $\mathbb{P}(\xi = k)$ также находится по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(\eta = n)\mathbb{P}(\xi = k \mid \eta = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda} C_n^k p^k q^{n-k} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k p^k}{k!}\, e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} q^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k p^k}{k!}\, e^{-\lambda}\, e^{\lambda q} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, e^{-\lambda p},
\end{aligned}$$

так что случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λp.
Ответ. $\xi \sim \mathrm{Pois}(\lambda p)$, $\mathbb{E}\xi = \lambda p$.

31. Стержень единичной длины наудачу разламывается на две части, после чего бо́льшая из частей снова наудачу разламывается на две части. Какова вероятность того, что из полученных обломков стержня можно составить треугольник?
Решение. Будем считать, что стержень имеет единичную длину. Рассмотрим два случая: $\xi \ge 1/2$ и $\xi < 1/2$.

Если $\xi \ge 1/2$, то $\eta \sim \mathrm{Unif}[0, \xi]$ и стержень разбивается на три обломка, длины которых равны η, $\xi - \eta$ и $1 - \xi$. Из этих обломков можно составить треугольник тогда и только тогда, когда

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta < (\xi - \eta) + (1 - \xi), \\ \xi - \eta < \eta + (1 - \xi), \\ 1 - \xi < \eta + (\xi - \eta), \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi > 1/2, \\ \xi - 1/2 < \eta < 1/2. \end{array} \right.$$

Если $\xi < 1/2$, то $\eta \sim \mathrm{Unif}[\xi, 1]$ и стержень разбивается на три обломка, длины которых равны ξ, $\eta - \xi$ и $1 - \eta$. Из этих обломков можно составить треугольник тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \xi < (\eta - \xi) + (1 - \eta), \\ \eta - \xi < \xi + (1 - \eta), \\ 1 - \eta < \xi + (\eta - \xi), \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \xi < 1/2, \\ 1/2 < \eta < \xi + 1/2. \end{cases}$$

Искомая вероятность составить треугольник равна сумме вероятностей в каждом из этих случаев:

$$\mathbb{P}(\xi > 1/2,\ \xi - 1/2 < \eta < 1/2) + \mathbb{P}(\xi < 1/2,\ 1/2 < \eta < \xi + 1/2).$$

Если бы значение ξ было зафиксировано, то каждая из этих вероятностей находилась бы легко. Вычислим условные вероятности, используя тот факт, что случайная величина η равномерно распределена на соответствующих отрезках:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi > 1/2,\ \xi - 1/2 < \eta < 1/2 \mid \xi = x) &= \begin{cases} 0, & x \le 1/2, \\ \frac{1/2 - (x - 1/2)}{x}, & x > 1/2, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & x \le 1/2, \\ \frac{1-x}{x}, & x > 1/2; \end{cases} \\ \mathbb{P}(\xi < 1/2,\ 1/2 < \eta < \xi + 1/2 \mid \xi = x) &= \begin{cases} \frac{(x+1/2) - 1/2}{1-x}, & x < 1/2, \\ 0, & x \ge 1/2, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x < 1/2, \\ 0, & x \ge 1/2. \end{cases} \end{aligned}$$

По формуле полной вероятности находим окончательный ответ путем интегрирования полученных вероятностей, умноженных на плотность $p_\xi(x)$, по отрезку $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} &\int_{1/2}^{1} \frac{1-x}{x} \cdot 1\, dx + \int_{0}^{1/2} \frac{x}{1-x} \cdot 1\, dx \\ &\qquad = \quad 2 \int_{1/2}^{1} \frac{1-x}{x}\, dx = 2(\ln x - x)\Big|_{1/2}^{1} = 2 \ln 2 - 1 \approx 0.386. \end{aligned}$$

Ответ. $2 \ln 2 - 1 \approx 0.386$.

11. Нормальное распределение

32. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$. Величины $\eta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2$ имеют так называемые χ^2-распределения с n степенями свободы. Найдите плотности распределений случайных величин η_1 и η_2.

Решение. Сначала найдем плотность η_1, применив формулу для плотности функции от случайной величины: если задана плотность $p_\xi(x)$, $\eta = g(\xi)$, то

$$p_\eta(y) = \sum_i p_\xi(x_i) \cdot \left| \frac{1}{g'(x_i)} \right|, \qquad \text{где } g(x_i) = y.$$

В нашем случае $p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$ и $y = g(x) = x^2$. При $y > 0$ имеем два прообраза $x_{1,2} = \pm\sqrt{y}$, при $y = 0$ — один прообраз $x = 0$, а при $y < 0$ прообразов нет. Далее,

$$\left|\frac{1}{g'(x_i)}\right| = \frac{1}{|2x_i|} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad y > 0.$$

поэтому при $y > 0$

$$p_{\eta_1}(y) = p_\xi(x_1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} + p_\xi(x_2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}},$$

а при $y \le 0$ плотность $p_{\eta_1}(y)$ равна нулю. (В ответе можно заменить переменную y на x.)

Теперь вычислим плотность p_{η_2}. Поскольку величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то таковыми будут и величины ξ_1^2 и ξ_2^2. Это означает, что плотность p_{η_2} может быть найдена как свертка плотности p_{η_1} с самой собой. По формуле свертки

$$p_{\eta_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\eta_1}(x-y)p_{\eta_1}(y)\,dy.$$

Поскольку плотность $p_{\eta_1}(x)$ отлична от нуля только при $x > 0$, то подынтегральное выражение отлично от нуля только при $0 < y < x$, поэтому

$$\begin{aligned}
p_{\eta_2}(x) &= \int_0^x p_{\eta_1}(x-y)p_{\eta_1}(y)\,dy = \int_0^x \frac{e^{-(x-y)/2}}{\sqrt{2\pi(x-y)}}\cdot\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}\,dy = \\
&= \frac{e^{-x/2}}{2\pi}\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(x-y)y}} = \left|\begin{array}{l} y = x\sin^2 t, \\ x \to \pi/2, \\ 0 \to 0, \\ dy = 2x\sin t\cos t\,dt \end{array}\right| = \\
&= \frac{e^{-x/2}}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{2x\sin t\cos t\,dt}{x\sin t\cos t} = \frac{1}{2}\,e^{-x/2}, \quad x > 0.
\end{aligned}$$

Ответ. $p_{\eta_1}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$ $p_{\eta_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$ т.е. $\eta_2 \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{2})$.

33. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$, $\eta = e^\xi$, т.е. η имеет логарифмически нормальное распределение. Найдите $\mathbb{E}\eta$ и $\mathrm{Var}\,\eta$.

Решение. $\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}e^\xi$ находим по формуле математического ожидания для функции от случайной величины, делая замену и выделяя полный квадрат:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^x p_\xi(x)\,dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^x\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}dx = \left|\begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = y, \\ x = a+\sigma y, \\ dx = \sigma\,dy \end{array}\right| = \\
&= \frac{e^a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma y - y^2/2}\,dy = \frac{e^a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-\sigma)^2/2}e^{\sigma^2/2}\,dy = \\
&= \frac{e^{a+\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-\sigma)^2/2}\,d(y-\sigma) = e^{a+\sigma^2/2}.
\end{aligned}$$

Найдем $\mathbb{E}\eta^2 = \mathbb{E}e^{2\xi}$. Поскольку $2\xi \sim \mathcal{N}(2a, 4\sigma^2)$, то можно использовать предыдущий ответ, подставив туда новые параметры: $\mathbb{E}\eta^2 = e^{2a+2\sigma^2}$. Дисперсия

$$\operatorname{Var}\eta = \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\eta)^2 = e^{2a+2\sigma^2} - (e^{a+\sigma^2/2})^2 = e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

Ответ. $\mathbb{E}\eta = e^{a+\sigma^2/2}$, $\operatorname{Var}\eta = e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

12. Сходимость почти наверное и сходимость по вероятности

34. Пусть $\xi_n \to \xi$ и $\xi_n \to \eta$ п.н. Докажите, что $\mathbb{P}\{\xi = \eta\} = 1$. Справедлив ли аналогичный результат для сходимости по вероятности?
Решение. Рассмотрим два события

$$\begin{aligned} A &= \{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega) \text{ при } n \to \infty\}, \\ B &= \{\omega : \xi_n(\omega) \to \eta(\omega) \text{ при } n \to \infty\}. \end{aligned}$$

В силу условия задачи $\mathbb{P}(A) = 1$ и $\mathbb{P}(B) = 1$, поэтому $\mathbb{P}(AB) = 1$. Для любого $\omega \in AB$ выполнено $\{\xi(\omega) = \eta(\omega)\}$, поскольку при таких ω *числовые* последовательности $\xi_n(\omega)$ имеют единственный предел. Включение $AB \subset \{\xi = \eta\}$, влечет $\mathbb{P}\{\xi = \eta\} = 1$.

Пусть теперь $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$ и $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta$. Заметим, что в силу неравенства треугольника выполнено:

$$\{|\xi - \xi_n| \le \varepsilon/2\} \cap \{|\xi_n - \eta| \le \varepsilon/2\} \ \subset \ \{|\xi - \eta| \le \varepsilon\},$$

что после перехода к дополнениям равносильно

$$\{|\xi - \eta| > \varepsilon\} \ \subset \ \{|\xi - \xi_n| > \varepsilon/2\} \cup \{|\xi_n - \eta| > \varepsilon/2\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда в силу сходимости по вероятности

$$\mathbb{P}\{|\xi - \eta| > \varepsilon\} \le \mathbb{P}\{|\xi - \xi_n| > \varepsilon/2\} + \mathbb{P}\{|\xi_n - \eta| > \varepsilon/2\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Это означает, что $\mathbb{P}\{\xi = \eta\} = 1$.

35. Пусть $\xi_n \to \xi$ и $\eta_n \to \eta$ п.н. Докажите, что

а) $a\xi_n + b\eta_n \to a\xi + b\eta$ п.н. $(a, b \in \mathbb{R})$; б) $|\xi_n| \to |\xi|$ п.н.; в) $\xi_n\eta_n \to \xi\eta$ п.н.

Установите аналогичные результаты для сходимости по вероятности.
Решение. Рассмотрим два события

$$\begin{aligned} A &= \{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega) \text{ при } n \to \infty\}, \\ B &= \{\omega : \eta_n(\omega) \to \eta(\omega) \text{ при } n \to \infty\}. \end{aligned}$$

В силу условия задачи $\mathbb{P}(A) = 1$ и $\mathbb{P}(B) = 1$, поэтому $\mathbb{P}(AB) = 1$. Для любого $\omega \in AB$ *числовые* последовательности $(\xi_n(\omega))$ и $(\eta_(\omega))$ сходятся к *числам* $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$. Для числовых последовательностей все три доказываемые свойства верны и выполняются на множестве, содержащем в себе AB, и поэтому имеющем вероятность как минимум $\mathbb{P}(AB) = 1$.

Пусть теперь $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta$. Докажем пункт а). Сначала установим, что для $a \in \mathbb{R}$ выполнено $a\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a\xi$. Если $a = 0$, то это очевидно. Если $a \neq 0$, то

$$\mathbb{P}\{|a\xi_n - a\xi| > \varepsilon\} = \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon/|a|\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Теперь покажем, что $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi + \eta$. Поскольку

$$\{|\xi_n - \xi| \le \varepsilon/2\} \cap \{|\eta_n - \eta| \le \varepsilon/2\} \ \subset \ \{|(\xi_n + \eta_n) - (\xi + \eta)| \le \varepsilon\},$$

то

$$\{|(\xi_n + \eta_n) - (\xi + \eta)| > \varepsilon\} \ \subset \ \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon/2\} \cup \{|\eta_n - \eta| > \varepsilon/2\}$$

и

$$\mathbb{P}\{|(\xi_n + \eta_n) - (\xi + \eta)| > \varepsilon\} \le \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon/2\} + \mathbb{P}\{|\eta_n - \eta| > \varepsilon/2\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Пункты б) и в) доказываются аналогично с использованием тех же неравенств, что и при доказательстве аналогичных свойств пределов числовых последовательностей.

36. Пусть (ξ_n) — последовательность случайных величин такая, что для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} < \infty$. Докажите, что $\xi_n \to \xi$ п.н.

Решение. Согласно критерию сходимости почти наверное достаточно проверить, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\Big\{\omega : \sup_{k \ge n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\Big\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Запишем:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\sup_{k\ge n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\} &= \mathbb{P}\Big(\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \cup \{|\xi_{n+1} - \xi| > \varepsilon\} \cup \dots\Big) \\
&\le \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} + \mathbb{P}\{|\xi_{n+1} - \xi| > \varepsilon\} + \dots \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \to 0, \quad n \to \infty,
\end{aligned}$$

поскольку ряд из вероятностей сходится.

37. Пусть (ξ_n) имеет распределение Бернулли с параметром p_n. При каких условиях на p_n для последовательности (ξ_n) имеет место сходимость по вероятности?

Решение. Случайная величина ξ_n имеет распределение

ξ_n	0	1
$\mathbb{P}$	$1 - p_n$	p_n

. Пусть $p_n \to 0$. Покажем, что тогда $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. В самом деле, при $0 < \varepsilon < 1$ выполнено

$$\mathbb{P}\{|\xi_n - 0| \ge \varepsilon\} = \mathbb{P}\{\xi_n = 1\} = p_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Аналогично, если $p_n \to \infty$, то $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

Теперь покажем, что в остальных случаях, т.е. когда последовательность (p_n) имеет предел $p \in (0,1)$ или последовательность (p_n) не имеет предела, можно предъявить такую последовательность *независимых* случайных величин (ξ_n), для которой сходимость по вероятности отсутствует.

Выберем такую подпоследовательность (n_k), для которой $p_{n_k} \to p \in (0,1)$. Предположим, что (ξ_n) сходится по вероятности к некоторой случайной величине ξ. В этом случае при $k,l \to \infty$ выполнено

$$\mathbb{P}\{|\xi_{n_k} - \xi_{n_l}| \geq \varepsilon\} \leq \mathbb{P}\{|\xi_{n_k} - \xi| \geq \varepsilon/2\} + \mathbb{P}\{|\xi_{n_l} - \xi| \geq \varepsilon/2\} \to 0.$$

С другой стороны, при $0 < \varepsilon < 1$ и $k \neq l$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|\xi_{n_k} - \xi_{n_l}| \geq \varepsilon\} &= \mathbb{P}\{\xi_{n_k} \neq \xi_{n_l}\} \\ &= \mathbb{P}\{\xi_{n_k} = 1, \xi_{n_l} = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_{n_k} = 0, \xi_{n_l} = 1\} \\ &= p_{n_k}(1 - p_{n_l}) + (1 - p_{n_k})p_{n_l}, \end{aligned}$$

что при $k,l \to \infty$ стремится к положительному числу $p(1-p)+(1-p)p = 2p(1-p)$. Полученное противоречие завершает доказательство.
Ответ. $p_n \to 0$ или $p_n \to 1$.
38. * Пусть последовательность независимых случайных величин ξ_n сходится по вероятности. Докажите, что дисперсия предела равна 0.
Решение. Дисперсия предела равна нулю тогда и только тогда, когда этот предел является константой (неслучайной величиной).

Будем рассуждать методом от противного. Предположим, что $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi \neq \text{const}$. Тогда существуют такие $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, что $\mathbb{P}\{\xi < a - \varepsilon\} > 0$ и $\mathbb{P}\{\xi \geq a + \varepsilon\} > 0$ (рассмотрите отдельно два случая: а) случайная величина принимает два значения с положительной вероятностью каждое; б) остальные варианты). Заметим, что

$$\begin{aligned} \{\xi < a - \varepsilon\} &= \{\xi < a - \varepsilon,\ |\xi_n - \xi| < \varepsilon\} \cup \{\xi < a - \varepsilon,\ |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \\ &\subset \{\xi_n < a\} \cup \{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $\{\xi_n < a\} \subset \{\xi < a + \varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\}$, откуда следует, что при всех достаточно больших n

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi_n < a\} &\leq \mathbb{P}\{\xi < a + \varepsilon\} + \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \\ &= 1 - \mathbb{P}\{\xi \geq a + \varepsilon\} + \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \\ &\leq 1 - \delta \end{aligned}$$

с некоторым $\delta > 0$. Обозначим $A_n = \{\xi_n < a\}$ и $B_n = \{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\}$. Поскольку

$$\begin{aligned} \{\xi < a - \varepsilon\} &\subset (A_n \cup B_n)(A_{n+1} \cup B_{n+1}) \ldots (A_{n+k} \cup B_{n+k}) \\ &\subset A_n \ldots A_{n+k} \cup B_n \cup \ldots \cup B_{n+k}, \end{aligned}$$

то при всех достаточно больших n в силу независимости событий $A_n, \ldots, A_{n+k}$ выполнено

$$\mathbb{P}\{\xi < a - \varepsilon\} \leq (1-\delta)^{k+1} + \mathbb{P}(B_n) + \ldots + \mathbb{P}(B_{n+k}) \to 0,$$

если выбрать $k = k(n) \to \infty$ достаточно медленно. Поскольку левая часть неравенства не зависит от n и k, то $\mathbb{P}\{\xi < a - \varepsilon\} = 0$, что приводит нас к противоречию.

13. Характеристические функции

39. Случайная величина ξ имеет дискретное распределение:

ξ	-1	1
$\mathbb{P}$	$1/2$	$1/2$

, а случайная величина $\eta \sim \text{Unif}[-1,1]$ не зависит от ξ.

- Вычислите характеристические функции $\varphi_\xi(t)$ и $\varphi_\eta(t)$.
- Найдите распределение случайной величины $\xi+\eta$.

Решение. Сначала найдем характеристические функции $\varphi_\xi(t)$ и $\varphi_\eta(t)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi(t) &= e^{it\cdot(-1)}\cdot\frac{1}{2}+e^{it\cdot 1}\cdot\frac{1}{2}= \\
&= \frac{1}{2}(\cos(-t)+i\sin(-t))+\frac{1}{2}(\cos t+i\sin t)=\cos t; \\
\varphi_\eta(t) &= \int_{-1}^{1} e^{itx}\cdot\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{itx}}{it}\Big|_{x=-1}^{x=1}=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2it}=\frac{\sin t}{t}.
\end{aligned}$$

Характеристическая функция суммы $\xi+\eta$ равна произведению характеристических функций:

$$\varphi_{\xi+\eta}(t)=\varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)=\cos t\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{\sin 2t}{2t}=\varphi_\eta(2t)=\varphi_{2\eta}(t).$$

Поскольку характеристическая функция однозначно определяет распределение, то распределение суммы $\xi+\eta$ совпадает с распределением величины $2\eta\sim\text{Unif}[-2,2]$.
Ответ. $\varphi_\xi(t)=\cos t$, $\varphi_\eta(t)=\frac{\sin t}{t}$, $\xi+\eta\sim\text{Unif}[-2,2]$.

40. Докажите, что если $\varphi_\xi(t)$ — периодическая функция, то ξ — дискретная случайная величина.
Решение. Пусть T — период характеристической функции: $\varphi_\xi(t+T)=\varphi_\xi(t)$. При $t=0$ имеем: $\varphi_\xi(T)=\mathbb{E}e^{iT\xi}=\varphi_\xi(0)=1$. Поскольку $|e^{it\xi}|=1$, то $\mathbb{E}e^{iT\xi}=1$ тогда и только тогда, когда $e^{iT\xi}=1$ п.н. Последнее означает, что $T\xi\in\{0,\pm2\pi,\pm4\pi,\dots\}$, так что все значения случайной величины ξ, принимаемые с положительной вероятностью, содержатся во множестве $\{0,\pm\frac{2\pi}{T},\pm\frac{4\pi}{T},\dots\}$, а величина ξ имеет дискретное распределение.

41. Докажите, что если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, то $\varphi_\xi(t)\to0$, $t\to\infty$.
Решение. Применим лемму Римана–Лебега, согласно которой для функции f, интегрируемой на отрезке $[a,b]$, выполнены соотношения:[1]

$$\int_a^b f(x)\cos tx\,dx\to0,\qquad \int_a^b f(x)\sin tx\,dx\to0\quad\text{при } t\to\infty.$$

[1] Доказательство леммы Римана–Лебега для непрерывно дифференцируемой функции f производится с помощью интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x)\sin tx\,dx=\frac{-f(b)\cos bt+f(a)\cos at}{t}+\frac{1}{t}\int_a^b f'(x)\cos tx\,dx\to0,\quad t\to\infty,$$

поскольку $|f(b)\cos bt|\le|f(b)|$, $|f(a)\cos at|\le|f(a)|$ и $|\int\limits_a^b f'(x)\cos tx\,dx|\le\int\limits_a^b|f'(x)|\,dx$ — конечные величины.

Представим характеристическую функцию $\varphi_\xi(t)$ в виде:

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-N}^{N} p_\xi(x)(\cos tx + i \sin tx)\, dx + \int_{|x|\ge N} e^{itx} p_\xi(x)\, dx.$$

При любом $N > 0$ первый интеграл в правой части этого равенства стремится к нулю в силу леммы Римана–Лебега. Второй интеграл можно сделать сколь угодно малым, выбирая N достаточно большим, силу оценки

$$\Big| \int_{|x|\ge N} e^{itx} p_\xi(x)\, dx \Big| \le \int_{|x|\ge N} |e^{itx}| \cdot |p_\xi(x)|\, dx = \int_{|x|\ge N} p_\xi(x)\, dx,$$

где $\int\limits_{|x|\ge N} p_\xi(x)\, dx$ — хвост сходящегося интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\, dx = 1$.

42. Характеристическая функция случайной величины ξ имеет вид:

а) $\cos^2 t$; б) $\frac{\operatorname{ch} e^{it}}{\operatorname{ch} 1}$.

Найдите распределение ξ, а также $\mathbb{E}\xi$ и $\operatorname{Var}\xi$.
Решение. а) Поскольку $\cos t = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$, то

$$\varphi_\xi(t) = \cos^2 t = \frac{1}{4}e^{i2t} + \frac{1}{2}e^{i0t} + \frac{1}{4}e^{i(-2)t},$$

откуда видно (вспомните определение характеристической функции для дискретной случайной величины), что случайная величина ξ имеет дискретное распределение и принимает значения 2, 0 и -2 с вероятностями $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ соответственно.

Математическое ожидание и дисперсию можно найти либо непосредственно из распределения, либо с помощью производных характеристической функции:

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi'(t) &= (\cos^2 t)' = -2\cos t \sin t = -\sin 2t,\\
\varphi_\xi'(0) &= 0 = i\mathbb{E}\xi,\\
\varphi_\xi''(t) &= -2\cos 2t,\\
\varphi_\xi''(0) &= -2 = i^2\mathbb{E}\xi^2,
\end{aligned}$$

откуда $\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 = 2$, $\operatorname{Var}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 2$.

б) В разложение $\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$ подставим $z = e^{it}$ и запишем:

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} 1} + \frac{e^{i2t}}{2!\operatorname{ch} 1} + \frac{e^{i4t}}{4!\operatorname{ch} 1} + \ldots,$$

В общем случае доказательство леммы Римана–Лебега опирается на следующее утверждение: если f интегрируема, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывно дифференцируемая функция f_ε, что $\int\limits_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon$, и оценку

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b f(x)\sin tx\, dx\Big| &\le \Big|\int_a^b (f(x) - f_\varepsilon(x))\sin tx\, dx\Big| + \Big|\int_a^b f_\varepsilon(x)\sin tx\, dx\Big| \le\\
&\le \int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx + \Big|\int_a^b f_\varepsilon(x)\sin tx\, dx\Big|.
\end{aligned}$$

откуда видно, что случайная величина ξ принимает значения 0, 2, 4, ..., с вероятностями $\frac{1}{\operatorname{ch} 1}$, $\frac{1}{2!\operatorname{ch} 1}$, $\frac{1}{4!\operatorname{ch} 1}$, ... соответственно.

Математическое ожидание и дисперсию найдем с помощью производных характеристической функции:

$$\begin{aligned}
\varphi'_\xi(t) &= \left(\frac{\operatorname{ch} e^{it}}{\operatorname{ch} 1}\right)' = \frac{\operatorname{sh} e^{it} \cdot e^{it} \cdot i}{\operatorname{ch} 1}, \\
\varphi'_\xi(0) &= \frac{i \operatorname{sh} 1}{\operatorname{ch} 1} = i \operatorname{th} 1 = i\mathbb{E}\xi, \\
\varphi''_\xi(t) &= \frac{\operatorname{ch} e^{it} \cdot e^{i2t} \cdot i^2 + \operatorname{sh} e^{it} \cdot e^{it} \cdot i^2}{\operatorname{ch} 1}, \\
\varphi''_\xi(0) &= \frac{i^2(\operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1)}{\operatorname{ch} 1} = i^2(1 + \operatorname{th} 1) = i^2\mathbb{E}\xi^2,
\end{aligned}$$

откуда $\mathbb{E}\xi = \operatorname{th} 1$, $\mathbb{E}\xi^2 = 1 + \operatorname{th} 1$, $\operatorname{Var}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 1 + \operatorname{th} 1 - \operatorname{th}^2 1$.

Ответ. а)

ξ	-2	0	2
$\mathbb{P}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

, $\mathbb{E}\xi = 0$, $\operatorname{Var}\xi = 2$;

б)

ξ	0	2	4	...
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{\operatorname{ch} 1}$	$\frac{1}{2!\operatorname{ch} 1}$	$\frac{1}{4!\operatorname{ch} 1}$	...

, $\mathbb{E}\xi = \operatorname{th} 1$, $\operatorname{Var}\xi = 1 + \operatorname{th} 1 - \operatorname{th}^2 1$.

43. Являются ли характеристическими следующие функции? Если да, то укажите соответствующее распределение, если нет, то объясните почему.

а) $\sin t$; б) $1 + \sin t$; в) $\cos t$; г) $\cos^5 t$; д) e^{-t}; е) e^{-it}; ж) e^{-t^2}.

Решение. а) Не является, поскольку при $t = 0$ характеристическая функция должна равняться 1.

б) Не является, поскольку при $t = \pi/2$ значение этой функции равно 2, а характеристическая функция ограничена по модулю единицей.

в) Поскольку $\cos t = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$, то это характеристическая функция случайной величины ξ с распределением $\mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}(\xi = -1) = \frac{1}{2}$.

г) Является, поскольку это характеристическая функция случайной величины $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$, где ξ_k независимы, одинаково распределены и имеют характеристическую функцию $\cos t$ (см. пункт в).

д) Не является, поскольку при $t = -1$ значение этой функции равно e, а характеристическая функция ограничена по модулю единицей.

е) Является, поскольку это характеристическая функция вырожденного распределения, сосредоточенного в точке -1.

ж) Является, поскольку это характеристическая функция нормального распределения $\mathcal{N}(0, 2)$.

Ответ. а) нет; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) да; ж) да.

44. Найдите плотность, математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, имеющей характеристическую функцию

$$\varphi_\xi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Решение. Поскольку эта характеристическая функция абсолютно интегрируема, то случайная величина ξ имеет плотность, которую можно вычислить с помощью формулы обращения:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\xi(t) e^{-itx}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} (1 - |t|) e^{-itx}\,dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 (1-t)e^{-itx}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^0 (1+t)e^{-itx}\,dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 (1-t)\cos tx\,dt = \left|\begin{array}{cc} 1-t=u & du=-dt \\ \cos tx\,dt = dv & v=\frac{\sin tx}{x}\end{array}\right| = \\
&= \frac{1}{\pi}(1-t)\frac{\sin tx}{x}\Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{1}{\pi x}\int_0^1 \sin tx\,dt = \frac{1}{\pi x}\left(-\frac{\cos tx}{x}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = \\
&= \frac{1-\cos x}{\pi x^2}.
\end{aligned}
$$

Так как характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ при $t=0$ имеет излом, т.е. не является дифференцируемой в этой точке, то $\mathbb{E}\xi$ и $\operatorname{Var}\xi$ не существуют. В этом можно также удостовериться, попытавшись вычислить математическое ожидание через найденную плотность:

$$
\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1-\cos x}{\pi x^2}\,dx \text{ — расходящийся интеграл.}
$$

Ответ. $p_\xi(x) = \frac{1-\cos x}{\pi x^2}$, $\mathbb{E}\xi$ и $\operatorname{Var}\xi$ не существуют.

45. Докажите, что если φ — характеристическая функция, то следующие функции также являются характеристическими:

а) φ^2; б) $|\varphi|^2$; в) $\operatorname{Re}\varphi$; г) $\dfrac{2}{2-\varphi}-1$; д) $e^{\varphi-1}$.

Решение. а) Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые и одинаково распределенные случайные величины, имеющие характеристическую функцию φ. Тогда их сумма $\xi_1+\xi_2$ имеет характеристическую функцию

$$
\varphi_{\xi_1+\xi_2} = \varphi_{\xi_1}\varphi_{\xi_2} = \varphi^2.
$$

б) Пусть ξ_1 и ξ_2 такие же, как и в пункте а). Тогда их разность имеет характеристическую функцию

$$
\varphi_{\xi_1-\xi_2} = \varphi_{\xi_1}\overline{\varphi}_{\xi_2} = \varphi\overline{\varphi} = |\varphi|^2.
$$

в-д) Воспользуется тем фактом, что если (φ_k) — характеристические функции, (a_k) — положительные числа такие, что $\sum a_k = 1$, то $\sum a_k\varphi_k$ — характеристическая функция (смеси распределений).

Случай в): $\operatorname{Re}\varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\overline{\varphi}$, а φ и $\overline{\varphi}$ — характеристические функции.

Случай г): запишем, что

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{2-\varphi} - 1 &= \frac{1}{1-\varphi/2} - 1 = 1 + \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi^2}{4} + \frac{\varphi^3}{8} + \ldots - 1 = \\
&= \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi^2}{4} + \frac{\varphi^3}{8} + \ldots,
\end{aligned}
$$

откуда видно, что $\varphi_k = \varphi^k$ и $a_k = 1/2^k$, $k=1,2,\ldots$.

Случай д): запишем, что

$$
e^{\varphi-1} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!}\,\varphi + \frac{1}{2!}\,\varphi^2 + \frac{1}{3!}\,\varphi^3 + \ldots\right),
$$

откуда видно, что $\varphi_k = \varphi^k$ и $a_k = \frac{1}{k!}\,e^{-1}$, $k=0,1,2,\ldots$.

14. Законы больших чисел

46. Последовательность (ξ_n) образована независимыми случайными величинами с нормальным распределением: $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, n^\alpha)$. Опишите множество тех $\alpha \geq 0$, при которых выполняется: а) ЗБЧ; б) СЗБЧ?
Решение. Если (ξ_n) — независимые случайные величины и $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, n^\alpha)$, то $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n \sim \mathcal{N}\left(0, \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha\right)$ и $\frac{S_n}{n} \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha\right)$.

Поскольку ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Var}\xi_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

сходится при $2-\alpha > 1$, то в силу теоремы Колмогорова при $0 \leq \alpha < 1$ к последовательности (ξ_n) применим СЗБЧ.

Рассмотрим случай $\alpha = 1$. Здесь $\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha = 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ и $\frac{S_n}{n} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$. Возьмем $\varepsilon > 0$, обозначим через η случайную величину со стандартным нормальным распределением и оценим вероятность

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n\sqrt{\operatorname{Var}\frac{S_n}{n}}} \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\operatorname{Var}\frac{S_n}{n}}}\right) = \mathbb{P}\left(|\eta| \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\operatorname{Var}\frac{S_n}{n}}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|\eta| \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}}\right) \geq \mathbb{P}\left(|\eta| \geq \varepsilon\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

Вероятность $\mathbb{P}\left(|\eta| \geq \varepsilon\sqrt{2}\right)$ отделена от нуля, поэтому вероятности $\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right)$ не могут стремиться к нулю, и ЗБЧ не выполняется. Поскольку сходимость почти наверное сильнее, чем сходимость по вероятности, то СЗБЧ также не выполнен.

Рассмотрим случай $\alpha > 1$. Здесь $\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha \asymp \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (это вытекает из доказательства интегрального признака сходимости рядов), где $a_n \asymp b_n$ означает, что $ca_n \leq b_n \leq Ca_n$ с некоторыми константами $0 < c \leq C < \infty$. Аналогично случаю $\alpha = 1$ находим, что

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) \geq \mathbb{P}\left(|\eta| \geq \frac{\delta}{\sqrt{n^{\alpha-1}}}\right) > 0,$$

т.е. ЗБЧ и СЗБЧ также не выполнены.
Ответ. а) $0 \leq \alpha < 1$; б) $0 \leq \alpha < 1$.

47. Применим ли ЗБЧ к последовательности независимых случайных величин (ξ_n) таких, что $\mathbb{P}(\xi_n = \pm\sqrt{n}) = 1/2$?
Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию ξ_n и проверим выполнение условий теоремы Колмогорова.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi_n &= -\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{n} \cdot \frac{1}{2} = 0, \\
\mathbb{E}\xi_n^2 &= (-\sqrt{n})^2 \cdot \frac{1}{2} + (\sqrt{n})^2 \cdot \frac{1}{2} = n,
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Var} \xi_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ — расходится.}$$

Возникает предположение, что ЗБЧ не выполнен, т.е. $\frac{S_n}{n} \overset{\mathbb{P}}{\not\to} 0$, $n \to \infty$. Для доказательства этого предположения используем аппарат характеристических функций.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\xi_k}(t) &= \mathbb{E} e^{it\xi_k} = \frac{1}{2}\, e^{it\sqrt{k}} + \frac{1}{2}\, e^{-it\sqrt{k}} = \cos(t\sqrt{k}), \\
\varphi_{\xi_k/n}(t) &= \varphi_{\xi_k}(t/n) = \cos\frac{t\sqrt{k}}{n}, \\
\varphi_{S_n/n}(t) &= \varphi_{\xi_1/n}(t) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\xi_n/n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t\sqrt{k}}{n}\right), \\
\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n/n}(t) &= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \ln\cos\left(\frac{t\sqrt{k}}{n}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Если показать, что предел не совпадает с характеристической функцией вырожденного распределения, сосредоточенного в нуле, т.е. не равен 1, то ЗБЧ не выполняется.

Запишем формулу Тейлора для функции $f(x) = \ln\cos x$ в окрестности нуля:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x, \qquad f'(0) = 0, \\
f''(x) &= -1 - \operatorname{tg}^2 x, \qquad f''(0) = -1, \\
f(x) &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0,
\end{aligned}$$

значит, $\ln\cos\left(\frac{t\sqrt{k}}{n}\right) = -\frac{t^2 k}{2n^2} + o\left(\frac{t^2 k}{n^2}\right)$, и

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\cos\left(\frac{t\sqrt{k}}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{t^2 k}{2n^2} + o\left(\frac{t^2 k}{n^2}\right)\right) = -\frac{t^2}{2} \cdot \frac{n+1}{2n} + o(t^2),$$

при $n \to \infty$. Предел суммы равен $-t^2/4$, значит $\varphi_{S_n/n}(t) \to e^{-t^2/4} \neq 1$.

Ответ. Нет.

48. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Пусть

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{(полиномы Бернштейна).}$$

Докажите, что $B_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$ при каждом $x \in [0,1]$.

Решение. Рассмотрим последовательность бернуллиевских случайных величин (ξ_n), которые независимы и имеют распределение $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = x$, $\mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1 - x$. Пусть $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, тогда $S_n \sim \operatorname{Bin}(n, x)$. Придадим полиномам Бернштейна вероятностный смысл:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right) = \mathbb{E} f\left(\frac{S_n}{n}\right).$$

По закону больших чисел $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\xi_1 = x$, а функция $f(x)$ непрерывна и ограничена. Из свойств сходимости по вероятности следует, что $B_n(x) = \mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) \to \mathbb{E}\xi_1 = f(x)$ при $n \to \infty$.

49. С помощью ЗБЧ вычислите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{n \text{ раз}} (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Решение. Придадим интегралу $\int\limits_0^1 f(x)\, dx$ вероятностный смысл: это $\mathbb{E}f(\xi)$, где $\xi \sim \mathrm{Unif}[0,1]$. Аналогичным образом, $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x,y)\, dx\, dy = \mathbb{E}f(\xi,\eta)$, где $\xi, \eta \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ — независимые случайные величины. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{n \text{ раз}} (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}\, dx_1 \ldots dx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}\sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2},$$

где $\xi_k \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ и независимы. Поскольку ξ_k^2 независимы, одинаково распределены и $\mathbb{E}\xi_k^2 = \int\limits_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$, то

$$\frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\xi_1^2 = \frac{1}{3}, \quad n \to \infty.$$

Из свойств сходимости по вероятности следует, что для любой непрерывной и ограниченной функции f

$$\mathbb{E}f\left(\frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n}\right) \to f(\mathbb{E}\xi_1^2), \quad n \to \infty.$$

В нашем случае $f(x) = \sqrt{x}$, так что ответом будет $\sqrt{\frac{1}{3}}$.
Ответ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

15. Центральная предельная теорема

50. Пусть случайная величина S_n равна сумме очков, выпавших при n независимых бросаниях симметричной игральной кости. Найдите такое n, что $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - 3.5| \geq 0.1) \leq 0.05$

а) с помощью неравенства Чебышёва; б) с помощью ЦПТ.

Решение. Пусть ξ_k — число очков, выпавших в k-м бросании игральной кости. Тогда $\mathbb{P}(\xi_k = i) = \frac{1}{6}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Находим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_1 &= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}, \\ \mathbb{E}\xi_1^2 &= \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = \frac{91}{6}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}\xi_1 &= \frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12},\\
\mathbb{E}S_n &= n\mathbb{E}\xi_1 = 3.5n,\\
\operatorname{Var}S_n &= n\operatorname{Var}\xi_1=\frac{35n}{12}.
\end{aligned}
$$

Применив неравенство Чебышёва, имеем:

$$
\mathbb{P}\left(|\frac{S_n}{n}-3.5|\geq 0.1\right)\leq\frac{\operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}-3.5\right)}{0.1^2}=\frac{100\operatorname{Var}S_n}{n^2}=\frac{3500}{12n}.
$$

Оценка $\frac{3500}{12n}\leq 0.05$ начинает выполняться при $n=5834$.

Посмотрим, что даст ЦПТ. При больших n случайная величина $\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var}S_n}}$ имеет приблизительно нормальное распределение, поэтому, обозначив $\eta\sim\mathcal{N}(0,1)$, запишем:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-3.5\right|\geq 0.1\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var}S_n}}\right|\geq\frac{0.1n}{\sqrt{\operatorname{Var}S_n}}\right)\\
&\approx \mathbb{P}\left(|\eta|\geq\frac{0.1n}{\sqrt{\frac{35n}{12}}}\right)=\mathbb{P}\left(|\eta|\geq\frac{\sqrt{12n}}{10\sqrt{35}}\right).
\end{aligned}
$$

По таблицам нормального распределения находим, что последняя вероятность равна 0.05, когда $\frac{\sqrt{12n}}{10\sqrt{35}}=1.96$, откуда $n\approx 1.96^2\cdot 100\cdot 35/12\approx 1121$.
Ответ. а) 5834; б) 1121.

51. Пусть (ξ_n) — последовательность независимых случайных величин, $\xi_n\sim\mathrm{Unif}[-n,n]$. Применима ли здесь ЦПТ?
Решение. Применим теорему Ляпунова при $\delta=1$. Находим:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi_n &= \int_{-n}^{n} x\cdot\frac{1}{2n}\,dx=0=a_n,\\
\operatorname{Var}\xi_n &= \int_{-n}^{n} x^2\cdot\frac{1}{2n}\,dx=\frac{n^2}{3}=\sigma_n^2,\\
\mathbb{E}|\xi_n-a_n|^3 &= \int_{-n}^{n}|x^3|\cdot\frac{1}{2n}\,dx=\frac{n^3}{4}=c_n^3,\\
B_n^2 &= \frac{1^2+\ldots+n^2}{3}\asymp n^3,\\
C_n^3 &= \frac{1^3+\ldots+n^3}{4}\asymp n^4.
\end{aligned}
$$

Поскольку

$$
\frac{C_n}{B_n}\asymp\frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt{n^3}}=n^{-1/6}\to 0,\quad n\to\infty,
$$

то ЦПТ выполнена.

Ответ. Да.

52. Пусть (ξ_n) — последовательность независимых случайных величин, $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, 2^n)$. Докажите, что условие Линдеберга не выполняется, но ЦПТ применима.
Решение. Оценим вклад одного слагаемого в формирование дисперсии всей суммы при выполнении условия Линдеберга:

$$\frac{\sigma_k^2}{B_n^2} = \frac{\mathbb{E}\xi_k^2 \mathbf{1}(|\xi_k| < \varepsilon B_n)}{B_n^2} + \frac{\mathbb{E}\xi_k^2 \mathbf{1}(|\xi_k| \geq \varepsilon B_n)}{B_n^2} \leq \varepsilon^2 + L_n(\varepsilon),$$

где

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\xi_k^2 \mathbf{1}(|\xi_k| \geq \varepsilon B_n).$$

Так как ε можно взять сколь угодно малым, а $L_n(\varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\frac{\sigma_k^2}{B_n^2} \to 0$, $k \leq n$, $n \to \infty$. Значит, сумма S_n составлена из большого числа пренебрежимо малых слагаемых.

По условию задачи $\operatorname{Var} \xi_n = 2^n$ и $\operatorname{Var} S_n = \operatorname{Var} \xi_1 + \ldots + \operatorname{Var} \xi_n = 1 + 2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$. Поскольку $\frac{\sigma_n^2}{B_n^2} = \frac{2^n}{2^{n+1}-1} \to \frac{1}{2}$, то условие Линдеберга не может быть выполнено. В то же время сумма S_n, как сумма независимых нормально распределенных слагаемых, также имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 2^{n+1} - 1)$, и ЦПТ, естественно, выполняется.

53. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией. Используя ЦПТ, докажите, что если случайная величина $\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}$ имеет такое же распределение как ξ и η, то это распределение — нормальное.
Решение. Пусть (ξ_n) — последовательность независимых случайных величин, распределенных по одинаковому закону с ξ и η. Тогда $\frac{\xi_1+\xi_2}{\sqrt{2}}$ и $\frac{\xi_3+\xi_4}{\sqrt{2}}$ имеют такое же распределение, что и ξ. Далее, величина

$$\frac{\frac{\xi_1+\xi_2}{\sqrt{2}} + \frac{\xi_3+\xi_4}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4}{2}$$

снова обладает таким же распределением. Продолжая аналогичным образом, получаем, что случайная величина

$$\zeta_m = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_{2^m}}{\sqrt{2^m}}$$

распределена так же, как и ξ. С другой стороны, при $m \to \infty$ в силу ЦПТ имеется сходимость ζ_m к нормальному распределению. Следовательно, распределение ξ нормально.

16. Цепи Маркова

54. Муха ползает по ребрам тетраэдра, выбирая в каждой вершине направление своего дальнейшего движения наугад и проползая ребро за единицу времени. Опишите этот процесс с помощью цепи Маркова и дайте классификацию её состояний. Найдите вероятности перехода за 2 шага, а также распределение цепи Маркова после n шагов для $n = 1, 2, 3$, если в самом начале положение мухи

a) достоверно известно;

б) равновероятно распределено на множестве вершин.

Как изменится ситуация, если в одной из вершин сидит паук?

Решение. Занумеруем вершины тетраэдра цифрами 1, 2, 3 и 4, введем состояния $E_i = \{$муха находится в вершине $i\}$ и рассмотрим последовательность случайных величин (X_n), где X_n — номер вершины, где муха находится в момент времени n. Поскольку муха выбирает направление движения наугад, то вероятности попасть в следующий момент времени в какую-либо вершину зависит только от текущего местоположения мухи, то (X_n) — однородная цепь Маркова. Вероятности перехода $p_{i,j}$ равны $\frac{1}{3}$ при $i \neq j$ и $p_{ii} = 0$. Таким образом, переходная матрица имеет вид:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как из каждой вершины муха может попасть в любую другую, то все состояния сообщающиеся и существенные, а поглощающих состояний нет.

Муха, выползая из вершины 1, может вернуться туда через 2 единицы времени, например, вдоль пути $1 \to 2 \to 1$, и через 3 единицы времени, например, вдоль пути $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Так как НОД$(2,3) = 1$, то состояние E_1 непериодично.

Найдем вероятности $f_1(n)$ первого возвращения в состояние E_1 после n шагов. Ясно, что $f_1(1) = 0$, так как муха за одну единицу времени успевает только лишь уползти из вершины 1. На последующих шагах муха будем ползать по вершинам 2, 3 и 4, пока не вернется в первый раз в вершину 1. Возращение возможно с вероятностью $\frac{1}{3}$, значит, числа $f_1(2), f_1(3), \ldots$ составляют геометрическое распределение $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$. Так как $F_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_1(n) = 1$, то состояние E_1 возвратно.

По теореме солидарности заключаем, что все состояния цепи непериодические и возвратные.

Для нахождения вероятностей перехода цепи Маркова за 2 шага возведем матрицу $\mathbf{P}$ в квадрат:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/3 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 2/9 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Пусть в начальный момент времени муха находится в вершине 1. Это описывается начальным распределением $\bar{p}(0) = (1,0,0,0)$. Распределение цепи после $1, 2, \ldots$ шагов находится путем последовательного умножения вектора-строки $\bar{p}(0)$ справа на матрицу перехода $\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned} \bar{p}(1) &= \bar{p}(0)\mathbf{P} = (1,0,0,0)\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1/3, 1/3, 1/3), \\ \bar{p}(2) &= \bar{p}(1)\mathbf{P} = (3/9, 2/9, 2/9, 2/9), \\ \bar{p}(3) &= (6/27, 7/27, 7/27, 7/27). \end{aligned}$$

Видно, что с течением времени вероятности «уравниваются».

Если исходное положение мухи равновероятно распределено на множестве всех четырех вершин, то $\bar{p}(0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, то оказывается, что $\bar{p}(1) = \bar{p}(0)\mathbf{P} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \bar{p}(0)$, т.е. распределение не изменяется с течением времени.

Если в вершину 4 посадить паука, то матрица перехода цепи Маркова изменится и станет равной

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь классификация состояний цепи изменится. Поскольку из состояний E_1, E_2, E_3 можно попасть в E_4, но уже нельзя вернуться назад, то состояния E_1, E_2, E_3 — несущественные, а состояние E_4 — существенное и поглощающее.

Численные расчеты проходят по той же схеме, что и ранее. Ответы даны ниже.

Ответ. При отсутствии паука все состояния цепи сообщающиеся, существенные, возвратные и непериодические,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/3 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 2/9 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

а) если $\bar{p}(0) = (1, 0, 0, 0)$, то $\bar{p}(1) = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\bar{p}(2) = (\frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9})$, $\bar{p}(3) = (\frac{6}{27}, \frac{7}{27}, \frac{7}{27}, \frac{7}{27})$;
б) если $\bar{p}(0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, то $\bar{p}(1) = \bar{p}(2) = \bar{p}(3) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Если паук сидит в вершине с номером 4, то состояния E_1, E_2, E_3 несущественные, а состояние E_4 — поглощающее,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 2/9 & 1/9 & 1/9 & 5/9 \\ 1/9 & 2/9 & 1/9 & 5/9 \\ 1/9 & 1/9 & 2/9 & 5/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) если $\bar{p}(0) = (1, 0, 0, 0)$, то $\bar{p}(1) = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\bar{p}(2) = (\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{5}{9})$, $\bar{p}(3) = (\frac{2}{27}, \frac{3}{27}, \frac{3}{27}, \frac{19}{27})$; если же $\bar{p}(0) = (0, 0, 0, 1)$, то $\bar{p}(1) = \bar{p}(2) = \bar{p}(3) = (0, 0, 0, 1)$;
б) если $\bar{p}(0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, то $\bar{p}(1) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6})$, $\bar{p}(2) = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{6}{9})$, $\bar{p}(3) = (\frac{2}{27}, \frac{2}{27}, \frac{2}{27}, \frac{21}{27})$.

55. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова за 1 шаг имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 1-p-\varepsilon & p & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

где $0 < p < 1 - \varepsilon \le 1$. Как выглядят стационарные распределения цепи при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon > 0$? Исследуйте поведение стационарного распределения при $\varepsilon \to +0$.

Решение. Если $\varepsilon = 0$, то матрица вероятностей перехода равна

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 1-p & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица задает разложимую цепь Маркова с двумя классами состояний $\{E_1, E_2\}$ и $\{E_3\}$, которые не сообщаются между собой. Стационарные распределения находятся из решения системы линейных уравнений $\bar{\pi} = \bar{\pi}\mathbf{P}$ с условием $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$:

$$\begin{cases} \pi_1(1-p) + \pi_2(1-p) & = & \pi_1, \\ \pi_1 p + \pi_2 p & = & \pi_2, \\ \pi_3 \cdot 1 & = & \pi_3, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & = & 1. \end{cases}$$

Общее решение этой системы уравнений имеет вид: $\pi_1 = \alpha(1-p)$, $\pi_2 = \alpha p$, $\pi_3 = 1-\alpha$, где $0 \le \alpha \le 1$. Таким образом, существует бесконечно много стационарных распределений. По своей сути эти распределения есть смеси двух стационарных распределений $(1-p, p)$ и (1), которые могут быть получены отдельно для двух неразложимых цепей Маркова, с множествами состояний $\{E_1, E_2\}$ и $\{E_3\}$.

Если $\varepsilon > 0$, то стационарное распределение также получается путем решения системы линейных уравнений и оказывается единственным. Оно равно

$$\left(\frac{\frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2}{p} - \varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2}{p}}, \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2}{p}}, \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2}{p}} \right).$$

При $\varepsilon \to +0$ это стационарное распределение сходится к $(0, 0, 1)$.
Ответ. При $\varepsilon = 0$ все стационарные распределения имеют вид: $\alpha(1-p, p, 0) + (1-\alpha)(0, 0, 1)$, где $0 \le \alpha \le 1$. При $\varepsilon > 0$ стационарное распределение имеет вид:

$$\left(\frac{\frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2}{p} - \varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2}{p}}, \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2}{p}}, \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2}{p}} \right).$$

При $\varepsilon \to +0$ стационарное распределение сходится к $(0, 0, 1)$.

17. Элементы математической статистики

56. Пусть (X_1, X_2, X_3) — случайная выборка объема $n = 3$ из генеральной совокупности X, распределенной по экспоненциальному закону с плотностью

$$p(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующие три оценки математического ожидания, которое равно $1/\lambda$:

$$\hat{\theta} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, \quad \tilde{\theta} = \frac{X_{(1)} + X_{(3)}}{2}, \quad \theta^* = X_{(2)}.$$

Проверьте эти оценки на несмещенность и исправьте смещенные оценки соответствующим образом. Сравните дисперсии несмещенных оценок, полученных из $\hat{\theta}$ и θ^*.
Решение. Пусть случайная величина $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, тогда ее функция распределения, математическое ожидание и дисперсия равны

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \\ \mathbb{E}X &= \int_0^\infty x\, dF_X(x) = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}, \\ \operatorname{Var} X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Поскольку случайные величины X_1, X_2, X_3 независимы и распределены также как X, то

$$\mathbb{E}\hat{\theta} = \frac{1}{3}(\mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \mathbb{E}X_3) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \operatorname{Var}\hat{\theta} = \frac{1}{9}(\operatorname{Var} X_1 + \operatorname{Var} X_2 + \operatorname{Var} X_3) = \frac{1}{3\lambda^2}.$$

Найдем функции распределения случайных величин $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{(3)} < x) &= \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, X_3) < x) = \mathbb{P}(X_1 < x, X_2 < x, X_3 < x) = (\mathbb{P}(X < x))^3 \\ &= \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^3, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases} \\ \mathbb{P}(X_{(1)} < x) &= 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, X_2, X_3) \ge x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \ge x, X_2 \ge x, X_3 \ge x) = 1 - (\mathbb{P}(X \ge x))^3 \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(X < x))^3 = \begin{cases} 1 - e^{-3\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{(2)} < x) &= \mathbb{P}(X_1 < x, X_2 < x \text{ или } X_1 < x, X_3 < X \text{ или } X_2 < x, X_3 < x) \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{Используем формулу } \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \\ \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(BC) - \mathbb{P}(AC) + \mathbb{P}(ABC) \text{ вместе с независимостью и} \\ \text{одинаковой распределенностью случайных величин} \end{array} \right| \\
&= 3(\mathbb{P}(X < x))^2 - 2(\mathbb{P}(X < x))^3 = \begin{cases} 3(1 - e^{-\lambda x})^2 - 2(1 - e^{-\lambda x})^3, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases}
\end{aligned}
$$

Теперь вычислим математические ожидания оценок $\tilde{\theta}$ и θ^*:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\tilde{\theta} &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}X_{(1)} + \mathbb{E}X_{(3)}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x\, d(1 - e^{-3\lambda x}) + \frac{1}{2}\int_0^\infty x\, d(1 - e^{-\lambda x})^3 \\
&= \frac{3\lambda}{2}\int_0^\infty x(e^{-\lambda x} - 2e^{-2\lambda x} + 2e^{-3\lambda x})\, dx = \frac{13}{12\lambda}, \\
\mathbb{E}\theta^* &= \mathbb{E}X_{(2)} = \int_0^\infty x\, d\left(3(1 - e^{-\lambda x})^2 - 2(1 - e^{-\lambda x})^3\right) = \frac{5}{6\lambda},
\end{aligned}
$$

так что оценки $\tilde{\theta}$ и θ^* — смещенные. Чтобы добиться несмещенности, нужно умножить $\tilde{\theta}$ и θ^* на $\frac{12}{13}$ и $\frac{6}{5}$ соответственно.

Вычислим дисперсию оценки θ^*:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\theta^*)^2 &= \mathbb{E}X_{(2)}^2 = \int_0^\infty x^2\, d\left(3(1 - e^{-\lambda x})^2 - 2(1 - e^{-\lambda x})^3\right) = \frac{19}{18\lambda^2}, \\
\operatorname{Var}\theta^* &= \mathbb{E}(\theta^*)^2 - (\mathbb{E}\theta^*)^2 = \frac{19}{18\lambda^2} - \left(\frac{5}{6\lambda}\right)^2 = \frac{13}{36\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

Поскольку исправленная оценка отличается коэффициентом $\frac{6}{5}$, то дисперсия исправленной оценки $\frac{6}{5}\theta^*$ будет равна

$$
\operatorname{Var}\left(\frac{6}{5}\,\theta^*\right) = \frac{36}{25} \cdot \frac{13}{36\lambda^2} = \frac{13}{25\lambda^2} > \frac{1}{3\lambda^2} = \operatorname{Var}\hat{\theta}.
$$

Ответ. Оценка $\hat{\theta}$ является несмещенной, оценки $\tilde{\theta}$ и θ^* — смещенные; исправленные оценки равны $\frac{12}{13}\tilde{\theta}$ и $\frac{6}{5}\theta^*$ соответственно; $\operatorname{Var}\hat{\theta} = \frac{1}{3\lambda^2}$, $\operatorname{Var}\left(\frac{6}{5}\theta^*\right) = \frac{13}{25\lambda^2}$.

57. Имеется случайная выборка объема n из генеральной совокупности с распределением $\mathrm{Pois}(\lambda)$, где параметр распределения неизвестен. Оцените значение неизвестного параметра с помощью метода моментов и метода максимального правдоподобия. Являются ли полученные оценки несмещенными? Какие из статистических моделей являются регулярными? Найдите информацию Фишера, проверить неравенство Рао-Крамера и сделайте вывод об эффективности полученных оценок.

Решение.

Метод моментов. Если случайная величина $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, то $p(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda}$ и $\mathbb{E}X = \lambda$. Для получения оценки методом моментов заменим теоретическое значение математического ожидания $\mathbb{E}X$ на выборочное среднее:

$$
\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) = \hat{\lambda}_n.
$$

Метод максимального правдоподобия. Выпишем функцию правдоподобия и логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\begin{aligned} L(x_1,\ldots,x_n;\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} p(x_k;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\,e^{-\lambda}\right), \\ l(x_1,\ldots,x_n;\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i! - n\lambda. \end{aligned}$$

Составим и решим уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial l}{\partial\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Таким образом, оба метода дали одну и ту же оценку (выборочное среднее).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\hat\lambda_n &= \frac{1}{n}(\mathbb{E}X_1+\ldots+\mathbb{E}X_n) = \frac{1}{n}\cdot n\mathbb{E}X = \lambda \text{ (несмещенная оценка)}, \\ \operatorname{Var}\hat\lambda_n &= \frac{1}{n^2}(\operatorname{Var}X_1+\ldots+\operatorname{Var}X_n) = \frac{n}{n^2}\operatorname{Var}X = \frac{\lambda}{n}. \end{aligned}$$

Проверим, является ли модель регулярной. Для этого запишем тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} = 1$$

и продифференцируем его формально по λ. Если полученное равенство будет верным, то модель является регулярной.[2] Дифференцируем и преобразуем левую часть (слагаемое для $k=0$ дифференцируется отдельно):

$$-e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}}{k!}\,e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}(-e^{-\lambda}) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{-\lambda} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} = 0.$$

Информация Фишера равна

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \mathbb{E}\left(\frac{\partial\ln p(X;\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2 = \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\left(\frac{\lambda^X}{X!}\,e^{-\lambda}\right)\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}(X\ln\lambda - \ln X! - \lambda)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\frac{X}{\lambda}-1\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}(X-\lambda)^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^2}(\mathbb{E}X^2 - 2\lambda\mathbb{E}X + \lambda^2) = \frac{1}{\lambda^2}(\lambda+\lambda^2-2\lambda^2+\lambda^2) = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Неравенство Рао-Крамера приобретает вид:

$$\frac{\lambda}{n} = \operatorname{Var}\hat\lambda_n \geq \frac{1}{nI(\lambda)} = \frac{1}{n\cdot 1/\lambda} \text{ (равенство).}$$

[2]Вообще-то, нужно ещё проверить, что можно дифференцировать по λ равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(k)\frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} = g(\lambda).$$

Поскольку статистическая модель регулярна и неравенство Рао-Крамера превратилось в равенство, то оценка $\hat{\lambda}_n$ эффективна.

Ответ. $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}_n$ — несмещенная оценка параметра λ. Модель регулярна. Информация Фишера $I(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$. Неравенство Рао-Крамера превращается в равенство, поэтому оценка $\hat{\lambda}_n$ эффективна.

58. Пусть X — число изюминок, содержащихся в булочке. Как следует из ранее решенной задачи (см. тему «Схема Бернулли-2»), распределение X подчиняется закону Пуассона, т.е. $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$ с некоторым $\lambda > 0$. Требуется проверить основную гипотезу $H_0 : \lambda = 4$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \lambda = 2$ на уровне значимости $\alpha = 0.3$. Постройте соответствующий оптимальный критерий Неймана-Пирсона, найдите вероятность ошибки II рода и четко сформулируйте алгоритм проверки гипотез, основанный на этом критерии.

Решение. Для построения оптимального критерия Неймана-Пирсона надо повторить рассуждения из доказательства теоремы (см. лекции).

Пусть $\lambda = 4$, т.е. справедлива гипотеза H_0, тогда дискретная плотность $p_0(x) = \frac{4^x}{x!}\, e^{-4}$. Если же $\lambda = 2$, т.е. справедлива гипотеза H_1, то $p_1(x) = \frac{2^x}{x!}\, e^{-2}$.

Оптимальный критерий Неймана-Пирсона определяется функцией

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & p_1(x) > cp_0(x), \\ \varepsilon, & p_1(x) = cp_0(x), \\ 0, & p_1(x) < cp_0(x), \end{cases}$$

где числа c и ε пока неизвестны. Выясним, как выглядит множество вида $p_1(x) > cp_0(x)$:

$$\frac{2^x}{x!}\, e^{-2} > c\,\frac{4^x}{x!}\, e^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad 2^x < \frac{e^2}{c} \quad \Leftrightarrow \quad x < \log_2 \frac{e^2}{c} = C.$$

Таким образом, критерий можно записать в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x < C, \\ \varepsilon, & x = C, \\ 0, & x > C, \end{cases}$$

где числа C и ε все еще пока не известны.

В доказательстве теоремы находятся значения c и ε, таким образом, чтобы $E_0\varphi = \alpha$. Следовательно, мы должны подобрать C и ε так, чтобы

$$\mathbb{E}_0\varphi = 1 \cdot \mathbb{P}(x < C \mid \lambda = 4) + \varepsilon \cdot \mathbb{P}(x = C \mid \lambda = 4) + 0 \cdot \mathbb{P}(x > C \mid \lambda = 4) = 0.3.$$

Поскольку x принимает целые значения, то в качестве C имеет смысл пробовать целые числа. Попробуем взять $C = 2$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0\varphi &= \mathbb{P}(x < 2 \mid \lambda = 4) + \varepsilon\mathbb{P}(x = 2 \mid \lambda = 4) = \left(\frac{4^0}{0!}\, e^{-4} + \frac{4^1}{1!}\, e^{-4}\right) + \varepsilon\frac{4^2}{2!}\, e^{-4} \\ &= 0.0916 + \varepsilon \cdot 0.1465, \end{aligned}$$

откуда видно, что выбором $\varepsilon \in [0, 1]$ не удастся сделать $\mathbb{E}_0\varphi = 0.3$. Следовательно, надо увеличить C, например, до $C = 3$. Проверим, можно ли тогда подобрать $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0\varphi &= \mathbb{P}(x < 3 \mid \lambda = 4) + \varepsilon\mathbb{P}(x = 3 \mid \lambda = 4) = \left(\frac{4^0}{0!}\, e^{-4} + \frac{4^1}{1!}\, e^{-4} + \frac{4^2}{2!}\, e^{-4}\right) + \varepsilon\frac{4^3}{3!}\, e^{-4} \\ &= 0.2381 + \varepsilon \cdot 0.1954. \end{aligned}$$

Оказывается, что теперь все в порядке, и можно положить $\varepsilon = \frac{0.3-0.2381}{0.1954} \approx 0.317$.

Итак, оптимальный критерий Неймана-Пирсона определяется функцией

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x < 3, \\ 0.317, & x = 3, \\ 0, & x > 3, \end{cases}$$

Вероятность ошибки II рода равна

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{E}_1\varphi &= 1 - \mathbb{P}(x < 3 \mid \lambda = 2) - 0.317 \cdot \mathbb{P}(x = 3 \mid \lambda = 2) \\ &= 1 - \left(\frac{2^0}{0!}\, e^{-2} + \frac{2^1}{1!}\, e^{-2} + \frac{2^2}{2!}\, e^{-2} \right) - 0.317 \cdot \frac{2^3}{3!}\, e^{-2} = 0.266. \end{aligned}$$

Сформулируем алгоритм проверки гипотез. Нужно взять булочку и посчитать, сколько туда попало изюминок. Если изюминок меньше трех, то принимается гипотеза H_1. Если изюминок больше трех, то принимается гипотеза H_0. Если в булочке ровно три изюминки, то бросаем жребий и с вероятностью 0.317 принимаем гипотезу H_1.

Ответ. $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x < 3, \\ 0.317, & x = 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$ Вероятность ошибки II рода равна 0.266.