

25. Элементы математической статистики-3

25.1. Предварительные сведения

Квантилью функции распределения F уровня γ называется такое число h_γ , что $F(h_\gamma) = \gamma$.

Доверительный интервал надежности γ для среднего нормальной выборки объема n с известным стандартным отклонением σ имеет вид

$$\bar{x} \pm u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль нормального распределения.

Если σ неизвестно, то доверительный интервал имеет вид

$$\bar{x} \pm t_{n-1, \frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $t_{n-1, \frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль распределения Стьюдента с $(n-1)$ -й степенью свободы, а s — несмещенная оценка стандартного отклонения.

Квантили нормального распределения и распределения Стьюдента находятся по таблицам или с помощью компьютера.

25.2. Практическое занятие

1. При помощи вольтметра, точность которого характеризуется средним квадратичным отклонением 0.2 В, произведено 10 измерений напряжения электрической батареи. Найдите 95%-й доверительный интервал для истинного значения напряжения, если среднее арифметическое результатов наблюдений $\bar{x} = 50.2$ В. Предполагается, что контролируемый признак имеет нормальный закон распределения.

Ответ. 50.2 ± 0.1 В.

2. В результате пусков 10 ракет получены значения боковых отклонений точек попадания от точек прицеливания:

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отклонение	1.0	0.2	1.0	-0.1	-0.5	5.0	-1.0	3.0	0.5	1.0

Предполагая, что случайная величина X , отклонение точки попадания от точки прицеливания, имеет нормальное распределение, постройте доверительный интервал для ее математического ожидания с коэффициентом доверия $\gamma = 0.99$.

Ответ. $\bar{x} = 1.01$, $s = 1.77$, $t_{9, 0.995} = 3.25$, доверительный интервал имеет вид: $(-0.81, 2.83)$.

3. Как выглядят формулы для односторонних доверительных интервалов для математического ожидания нормальной выборки надёжности γ ?

4. Два трейдера, новичок и профи, торгуют на волатильном рынке. Предположим, что доход сделок новичка описывается независимыми случайными величинами с распределением $\mathcal{N}(a_0, 20^2)$, а профи — $\mathcal{N}(a_1, 10^2)$. Через некоторый период времени выяснилось, что средняя доходность сделки новичка составляет -5 у.е., а профи $+1$ у.е. Каждый из них с уверенностью 90% пришёл к правильному заключению: торговля новичка убыточна ($a_0 < 0$), а профи может зарабатывать в среднем не менее 0.25 у.е. за одну сделку ($a_1 > 0.25$). Сколько сделок совершил каждый из них?

25.3. Домашнее задание

5. Из большой партии электроламп было отобрано случайным образом 400 штук для определения средней продолжительности горения. Выборочная средняя продолжительность горения ламп оказалась равной 1220 часов. Найдите с коэффициентом доверия $\gamma = 0.997$ доверительный интервал для средней продолжительности горения электролампы по всей партии, если стандартное отклонение равно 35 часов.

Ответ. 1220 ± 5.52 часа.

6*. В 10 000 сеансах игры с автоматом выигрыш появился 4000 раз.

- Используя предельные теоремы теории вероятностей, предложите способ нахождения границ доверительного интервала надежности γ .
- Рассчитайте 95%-й доверительный интервал для вероятности выигрыша.
- Оцените количество сеансов игры, которые следует провести, чтобы с вероятностью 0.99 можно было утверждать, что вероятность выигрыша p отличается от его частоты не более чем на 0.01.

Ответ. Если k — число выигрышей, а u_α — квантиль нормального распределения уровня α , то приближенный доверительный интервал имеет вид:

$$\frac{k}{n} - \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} \leq p \leq \frac{k}{n} + \frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)};$$

при $\gamma = 0.95$, $n = 10\,000$ и $k = 4000$ доверительный интервал равен $(0.39, 0.41)$; приблизительно 16 600 сеансов.

7. Научитесь с помощью электронных таблиц LibreOffice Calc или Microsoft Excel вычислять основные численные характеристики выборок (выборочные среднее, стандартное отклонение), находить квантили нормального распределения и распределения Стьюдента, вычислять границы доверительного интервала для нормальной выборки.