22. Цепи Маркова-2

22.1. Предварительные сведения

Вектор-строка $\vec{\pi} = (\pi_j)$, $\pi_j \geq 0$, $\sum\limits_j \pi_j = 1$, называется *стационарным распределением* цепи Маркова с переходной матрицей $\mathbf{P}$, если $\vec{\pi} = \vec{\pi}\mathbf{P}$.

Теорема 1. *Пусть число состояний цепи Маркова конечно. Тогда цепь неразложима и непериодична в том и только том случае, когда*

$$\exists \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \lim_{n\to\infty} p_j(n) = \pi_j > 0,$$

при этом $\vec{\pi} = (\pi_j)$ является единственным стационарным распределением и скорость сходимости к стационарному распределению экспоненциальна:

$$\max_{i,j} |p_{ij}(n) - \pi_j| \leq Ce^{-\alpha n}, \quad \max_j |p_j(n) - \pi_j| \leq Ce^{-\alpha n}, \quad C, \alpha > 0.$$

Эргодическая теорема утверждает, что начальное распределение «забывается» с экспоненциальной скоростью, и распределение цепи сходится к единственному стационарному распределению.

22.2. Практическое занятие

1. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Распределение по состояниям в момент времени $n = 0$ определяется вектором $\vec{p}(0) = (0.7, 0.2, 0.1)$. Найдите стационарное распределение цепи $\vec{\pi}$. Найдите распределения по состояниям в моменты времени $n = 1, 2, 3$ и убедитесь в том, что расстояние между этими распределениями и стационарным распределением, определяемое формулой $\|\vec{p}(n) - \vec{\pi}\| = \sum\limits_{j=1}^{3} |p_j(n) - \pi_j|$, убывает с ростом n.

Ответ. $\vec{\pi} = (\frac{16}{47}, \frac{17}{47}, \frac{14}{47}) \approx (0.340, 0.362, 0.298)$, $\vec{p}(1) = (0.22, 0.43, 0.35)$, $\vec{p}(2) = (0.385, 0.336, 0.279)$, $\vec{p}(3) = (0.3238, 0.3713, 0.3049)$; расстояния от $\vec{p}(0), \vec{p}(1), \vec{p}(2), \vec{p}(3)$ до $\vec{\pi}$ приблизительно равны 0.72, 0.24, 0.09 и 0.0324 соответственно.

2. Найдите стационарное распределение для модели диффузии П. и Т. Эренфестов: в сосудах A и B имеется N молекул; за единицу времени случайная молекула переходит из одного сосуда в другой. Оцените вероятности уклонения числа молекул в сосуде A от $N/2$ при $N \approx 6 \cdot 10^{23}$ (число Авогадро[1]). Применима ли здесь эргодическая теорема?

Ответ. $\mathrm{Bin}(N, 1/2)$. Нет.

3. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова за 1 шаг имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 1-p-\varepsilon & p & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

[1]Число Авогадро — это число молекул в одном моле любого вещества, 1 моль кислорода весит 32 грамма и занимает объем 22.4 литра при нормальных условиях, т.е. температуре 0°C и обычном атмосферном давлении 101 325 Па.

где $0 < p < 1 - \varepsilon \le 1$. Как выглядят стационарные распределения цепи при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon > 0$? Исследуйте поведение стационарного распределения при $\varepsilon \to +0$.
Ответ. При $\varepsilon = 0$ все стационарные распределения имеют вид: $\alpha(1-p, p, 0) + (1-\alpha)(0, 0, 1)$, где $0 \le \alpha \le 1$. При $\varepsilon > 0$ стационарное распределение имеет вид:

$$\left(\frac{\frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2}{p} - \varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2}{p}}, \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2}{p}}, \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{p} - \frac{\varepsilon^2}{p}} \right).$$

При $\varepsilon \to +0$ стационарное распределение сходится к $(0, 0, 1)$.

22.3. Домашнее задание

4. В городе N каждый житель имеет одну из трех профессий: A, B, C. Дети отцов, имеющих профессии A, B, C, сохраняют профессии отцов с вероятностями $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Найдите:

а) распределение по профессиям в следующем поколении, если в данном поколении профессию A имело 20% жителей, B — 30%, C — 50%;

б) предельное распределение по профессиям, когда число поколений растет;

в) распределение по профессиям, не меняющееся при смене поколений.

Ответ. а) $(\frac{143}{400}, \frac{171}{400}, \frac{86}{400})$; б), в) $(\frac{15}{41}, \frac{18}{41}, \frac{8}{41})$.
5. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, если $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.
Ответ. $\begin{pmatrix} 6/17 & 7/17 & 2/17 & 2/17 \\ 6/17 & 7/17 & 2/17 & 2/17 \\ 6/17 & 7/17 & 2/17 & 2/17 \\ 6/17 & 7/17 & 2/17 & 2/17 \end{pmatrix}$.
6. По двум урнам поровну разложено N черных и N белых шаров. Число черных шаров в первой урне в момент $n = 0, 1, 2, \ldots$ обозначим X_n. В целочисленные моменты времени случайно выбирают по одному шару из каждой урны и меняют их местами. Докажите, что X_n — цепь Маркова и найти ее стационарное распределение.
Ответ. $\pi_k = (C_N^k)^2 / C_{2N}^N$, $k = 0, 1, \ldots, N$.