21. Цепи Маркова-1

21.1. Предварительные сведения

Последовательность целочисленных случайных величин (X_n) называется *однородной цепью Маркова*, если
$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_1=k_1,\ldots,X_{n-1}=k_{n-1},X_n=i)=\mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i)=: p_{ij}.$$
Матрица $\mathbf{P}=(p_{ij})$ называется *матрицей перехода.* Вероятности перехода за n шагов составляют матрицу $\mathbf{P}^n=(p_{ij}(n))$. Числа $p_j(n)=\mathbb{P}(X_n=j)$ задают *распределение* цепи Маркова $\vec{p}(n)$ в момент времени n.

Определения *достижимых*, *сообщающихся*, *существенных*, *поглощающих*, *возвратных*, *нулевых* и *периодических* состояний даны в лекциях.

Цепь Маркова называется *неразложимой*, если она состоит из одного класса существенных сообщающихся состояний.

Теорема 1. *В неразложимой цепи все состояния принадлежат одному типу: если хотя бы одно состояние возвратное, нулевое или периодическое с периодом d, то и все состояния возвратные, нулевые или периодические с периодом d.*

21.2. Практическое занятие

1. Пусть (X_n) — последовательность случайных величин, а П, Н и Б — события из σ-алгебр прошлого $\sigma\{X_1,\ldots,X_{n-1}\}$, настоящего $\sigma\{X_n\}$ и будущего $\sigma\{X_{n+1},X_{n+2},\ldots\}$. Докажите, что
$$\mathbb{P}(\text{Б} \mid \text{Н}, \text{П})=\mathbb{P}(\text{Б} \mid \text{Н}) \quad\Leftrightarrow\quad \mathbb{P}(\text{П}, \text{Б} \mid \text{Н})=\mathbb{P}(\text{П} \mid \text{Н})\mathbb{P}(\text{Б} \mid \text{Н}).$$

2. Некий студент, поступив на первый курс, должен проучиться в университете 5 лет. Этот студент может с вероятностью p перейти на следующий курс, с вероятностью q быть отчислен после очередной летней сессии, и с вероятностью $r=1-p-q$ «уйти в академ» и через год восстановиться на том же курсе. Опишите «процесс обучения» с помощью цепи Маркова и дайте классификацию её состояний.

3. Муха ползает по ребрам тетраэдра, выбирая в каждой вершине направление своего дальнейшего движения наугад и проползая ребро за единицу времени. Опишите этот процесс с помощью цепи Маркова и дайте классификацию её состояний. Найдите вероятности перехода за 2 шага, а также распределение цепи Маркова после n шагов для $n=1,2,3$, если в самом начале положение мухи

а) достоверно известно; б) равновероятно распределено на множестве вершин.

Как изменится ситуация, если в одной из вершин сидит паук?

Ответ. При отсутствии паука все состояния цепи сообщающиеся, существенные, возвратные и непериодические,
$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{P}^2=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 & 2/9 & 2/9\\ 2/9 & 1/3 & 2/9 & 2/9\\ 2/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9\\ 2/9 & 2/9 & 2/9 & 1/3\end{pmatrix}.$$
а) если $\vec{p}(0)=(1,0,0,0)$, то $\vec{p}(1)=(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $\vec{p}(2)=(\frac{3}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9})$, $\vec{p}(3)=(\frac{6}{27},\frac{7}{27},\frac{7}{27},\frac{7}{27})$;
б) если $\vec{p}(0)=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$, то $\vec{p}(1)=\vec{p}(2)=\vec{p}(3)=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

Если паук сидит в вершине с номером 4, то состояния E_1,E_2,E_3 несущественные, а состояние E_4 — поглощающее,
$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{P}^2=\begin{pmatrix} 2/9 & 1/9 & 1/9 & 5/9\\ 1/9 & 2/9 & 1/9 & 5/9\\ 1/9 & 1/9 & 2/9 & 5/9\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

а) если $\vec{p}(0) = (1,0,0,0)$, то $\vec{p}(1) = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\vec{p}(2) = (\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{5}{9})$, $\vec{p}(3) = (\frac{2}{27}, \frac{3}{27}, \frac{3}{27}, \frac{19}{27})$; если же $\vec{p}(0) = (0,0,0,1)$, то $\vec{p}(1) = \vec{p}(2) = \vec{p}(3) = (0,0,0,1)$;
б) если $\vec{p}(0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, то $\vec{p}(1) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6})$, $\vec{p}(2) = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{6}{9})$, $\vec{p}(3) = (\frac{2}{27}, \frac{2}{27}, \frac{2}{27}, \frac{21}{27})$.

21.3. Домашнее задание

4. Пусть (ξ_n) — последовательность независимых случайных величин, наудачу и независимо друг от друга выбранных из множества $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Покажите, что (X_n) является цепью Маркова и дайте классификацию состояний, если

а) X_n — количество различных чисел среди $\xi_1, \ldots, \xi_n$;

б) X_n — последняя цифра произведения $\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n$.

Ответ. а) $p_{i,i} = \frac{i}{10}$, $p_{i,i+1} = \frac{10-i}{10}$; все состояния, кроме E_{10}, являются несущественными, состояние E_{10} — поглощающее; б) состояния $E_0, E_1, \ldots, E_9$ являются несущественными, состояние E_0 — поглощающее, матрица перехода

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

5. Матрица перехода за один шаг имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Будут ли соответствующие цепи Маркова периодическими? В случае периодических цепей найдите их периоды.
Ответ. а) да, $d = 4$; б) да, $d = 2$; в) нет.