20. Центральная предельная теорема

20.1. Предварительные сведения

Пусть (ξ_n) — последовательность случайных величин, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $a_n = \mathbb{E}\xi_n$, $0 < \sigma_n^2 = \operatorname{Var}\xi_n < \infty$. Если

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

то говорят, что выполнена *центральная предельная теорема* (ЦПТ). В этом случае для любых фиксированных $-\infty \le a < b \le \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\,dx.$$

Теорема 1. *Если (ξ_n) — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $0 < \mathbb{E}\xi_n^2 < \infty$, то выполнена ЦПТ.*

Теорема 2 (Линдеберг). *Пусть (ξ_n) — последовательность независимых случайных величин, $a_n = \mathbb{E}\xi_n$, $0 < \sigma_n^2 = \operatorname{Var}\xi_n < \infty$, $B_n^2 = \sum\limits_{k=1}^n \sigma_k^2$. Если для любого $\varepsilon > 0$*

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\xi_k - a_k)^2 \mathbf{1}(|\xi_k - a_k| \ge \varepsilon B_n) \to 0, \quad n \to \infty,$$

то выполнена ЦПТ.

Теорема 3 (Ляпунов). *Пусть (ξ_n) — последовательность независимых случайных величин, $a_n = \mathbb{E}\xi_n$, $0 < \sigma_n^2 = \operatorname{Var}\xi_n$, $c_n^{2+\delta} = \mathbb{E}|\xi_n - a_n|^{2+\delta} < \infty$, $\delta > 0$. Положим $B_n^2 = \sum\limits_{k=1}^n \sigma_k^2$, $C_n^{2+\delta} = \sum\limits_{k=1}^n c_k^{2+\delta}$. Если $\frac{C_n}{B_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то выполнена ЦПТ.*

На практике удобнее применять теорему Ляпунова, а не теорему Линдеберга.

20.2. Практическое занятие

1. Пусть случайная величина S_n равна сумме очков, выпавших при n независимых бросаниях симметричной игральной кости. Найдите такое n, что $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - 3.5| \ge 0.1) \le 0.05$

а) с помощью неравенства Чебышёва; б) с помощью ЦПТ.

Ответ. а) 5834; б) 1121.

2. Пусть (ξ_n) — последовательность независимых случайных величин, $\xi_n \sim \mathrm{Unif}[-n, n]$. Применима ли здесь ЦПТ?

Ответ. Да.

3. Пусть (ξ_n) — последовательность независимых случайных величин, $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, 2^n)$. Докажите, что условие Линдеберга не выполняется, но ЦПТ применима.

Указание. Покажите, что при выполнении условия Линдеберга $\sigma_k^2/B_n^2 \to 0$ при $k \le n$ и $n \to \infty$, после чего сравните σ_n^2 и B_n^2.

4. Пусть $\xi_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ — независимые случайные величины. Распределение случайной величины $\chi_n^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ называется распределением χ^2 (хи-квадрат) с n степенями свободы.

а) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\chi_n^2}{n} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$;

б) Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\chi_n^2 - \mathbb{E}\chi_n^2}{\sqrt{\operatorname{Var}\chi_n^2}} < x\right)$.

Указание. а) Примените ЗБЧ.

Ответ. б) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy$.

5*. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией. Используя ЦПТ, докажите, что если случайная величина $\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}$ имеет такое же распределение как ξ и η, то это распределение — нормальное.

20.3. Домашнее задание

6. В предположении, что размер одного шага пешехода равномерно распределен в интервале от 70 до 80 см., и размеры шагов независимы, найдите вероятность того, что пешеход пройдет расстояние от 7.49 до 7.51 км., сделав 10 000 шагов.

Ответ. Практически равна 1.

7. Пусть (ξ_n) — последовательность независимых одинаково распределенных невырожденных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Для каждого значения параметра $\alpha \geq 0$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n| < n^{\alpha}).$$

Ответ. 0 при $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, 1 при $\alpha > \frac{1}{2}$ и ≈ 0.6826 при $\alpha = \frac{1}{2}$.

8. Пусть $\xi_n \sim \mathrm{Pois}(n)$. С помощью ЦПТ докажите, что $\frac{\xi_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$ при $n \to \infty$.

Указание. Распределение Пуассона обладает следующим свойством: если $\xi_1 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1)$ и $\xi_2 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_2)$ — независимые величины, то $\xi_1 + \xi_2 \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

9. (Продолжение предыдущей задачи.) Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$;   б) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} \sum\limits_{k=0}^{n+[\sqrt{n}]} \frac{n^k}{k!}$.

($[x]$ означает целую часть числа x.)

Ответ. а) $\frac{1}{2}$; б) ≈ 0.8413.