19. Законы больших чисел

19.1. Предварительные сведения

Пусть (ξ_n) — последовательность случайных величин с конечными первыми моментами: $\mathbb{E}|\xi_n| < \infty$. Обозначим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Если

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \to \infty,$$

то говорят, что к последовательности (ξ_n) применим *закон больших чисел* (ЗБЧ).

Если

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \to 0 \text{ п.н.}, \quad n \to \infty,$$

то говорят, что к последовательности (ξ_n) применим *сильный закон больших чисел* (СЗБЧ).

Теорема 1 (Марков). *Пусть (ξ_n) — последовательность как угодно зависимых случайных величин. Если $\frac{1}{n^2} \operatorname{Var} S_n \to 0$, $n \to \infty$, то применим ЗБЧ.*

Теорема 2 (Колмогоров). *Пусть (ξ_n) — последовательность независимых случайных величин. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Var} \xi_n}{n^2} < \infty$, то применим СЗБЧ.*

Теорема 3 (Колмогоров). *Пусть (ξ_n) — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Тогда*

$$\frac{S_n}{n} \to a \text{ п.н. (СЗБЧ)} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \mathbb{E}\xi_1 = a.$$

19.2. Практическое занятие

1. Последовательность (ξ_n) образована независимыми случайными величинами с нормальным распределением: $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, n^\alpha)$. Опишите множество тех $\alpha \geq 0$, при которых выполняется:

а) ЗБЧ; б) СЗБЧ?

Ответ. а) $0 \leq \alpha < 1$; б) $0 \leq \alpha < 1$.

2. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Обозначим

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{(полиномы Бернштейна)}.$$

Докажите, что $B_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$ при каждом $x \in [0,1]$.

3. С помощью ЗБЧ вычислите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{n \text{ раз}} (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Пусть (ξ_n) — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbb{E}\xi_1 = a$ и $\operatorname{Var}\xi_1 = \sigma^2 < \infty$. Пусть
$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}.$$
Докажите, что последовательность (η_n) имеет предел по вероятности. Найдите этот предел.
Ответ. $\frac{a}{a^2+\sigma^2}$.
5*. Применим ли ЗБЧ к последовательности независимых случайных величин (ξ_n) таких, что $\mathbb{P}(\xi_n = \pm\sqrt{n}) = \frac{1}{2}$?
Указание. Используйте метод характеристических функций.
Ответ. Нет.

19.3. Домашнее задание

6. Последовательность (ξ_n) независимых одинаково распределенных случайных величин такова, что $\mathbb{E}\xi_n = 0$ и $\operatorname{Var}\xi_n = \sigma^2 < \infty$. Удовлетворяют ли следующие последовательности случайных величин ЗБЧ?

а) $\zeta_n = \xi_n + \xi_{n+1}$, б)* $\eta_n = \sum\limits_{k=0}^{[n^{1/3}]} \xi_{n+k}$.

Ответ. Обе последовательности удовлетворяют ЗБЧ.
7. Пусть $f(x)$ — непрерывная ограниченная функция. С помощью ЗБЧ вычислите
$$\lim_{n\to\infty} e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
Ответ. $f(\lambda)$.
8*. Пусть (ξ_n) – последовательность независимых случайных величин таких, что $\mathbb{P}(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ и $\mathbb{P}(\xi_n = \pm 2^n) = \frac{1}{2^{n+1}}$. Применимы ли здесь ЗБЧ и СЗБЧ?
Указание. Представьте сумму S_n в виде $\xi_1 + \ldots + \xi_m$ и $\xi_{m+1} + \ldots + \xi_n$, где $m = m(n) \to \infty$ достаточно медленно при $n \to \infty$.