18. Характеристические функции-2

18.1. Предварительные сведения

Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}$, $t \in \mathbb{R}$.
Свойства характеристических функций:

1) $|\varphi_\xi(t)| \le 1$ и $\varphi_\xi(0) = 1$;
2) $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$, $a, b \in \mathbb{R}$;
3) $\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)}$; в частности, если $\varphi_\xi(t)$ действительная, то она чётная;
4) $\varphi_\xi(t)$ равномерно непрерывна на числовой прямой $\mathbb{R}$;
5) если ξ и η — независимые случайные величины, то $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$;
6) если $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$, то существует непрерывная производная $\varphi^{(k)}(t)$, $\varphi^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}\xi^k$ и
$$\varphi_\xi(t) = 1 + \frac{(it)^1}{1!}\,\mathbb{E}\xi + \frac{(it)^2}{2!}\,\mathbb{E}\xi^2 + \ldots + \frac{(it)^k}{k!}\,\mathbb{E}\xi^k + o(|t|^k), \quad t \to 0;$$
7) характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ однозначно определяет распределение величины ξ.

Если характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ абсолютно интегрируема, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_\xi(t)|\,dt < \infty$, то случайная величина ξ имеет плотность, которую можно найти по *формуле обращения*:
$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\xi(t)e^{-itx}\,dt.$$

18.2. Практическое занятие

1. Являются ли характеристическими следующие функции? Если да, то укажите соответствующее распределение, если нет, то объясните почему.

а) $\sin t$; б) $1 + \sin t$; в) $\cos t$; г) $\cos^5 t$; д) e^{-t}; е) e^{-it}; ж) e^{-t^2}; з) e^{-t^4}.

2. Найдите плотность, математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, имеющей характеристическую функцию $\varphi_\xi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$

Ответ. $p_\xi(x) = \frac{1-\cos x}{\pi x^2}$, $\mathbb{E}\xi$ и $\operatorname{Var}\xi$ не существуют.

3. Докажите, что если φ — характеристическая функция, то следующие функции также являются характеристическими:

а) φ^2; б) $|\varphi|^2$; в) $\operatorname{Re}\varphi$; г) $\dfrac{2}{2-\varphi} - 1$; д) $e^{\varphi - 1}$.

4. Случайные величины ξ и η независимы и имеют распределение Коши с параметром a. Сравните характеристические функции и функции распределения случайных величин 2ξ и $\xi + \eta$.

5. Пусть (ξ_n) — последовательность независимых случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностями $1/2$. Найдите распределение случайной величины $\eta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\xi_n$.

18.3. Домашнее задание

6. С помощью формулы обращения найдите плотность распределения случайной величины ξ, характеристическая функция которой равна $\varphi_\xi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
Указание. Используйте методы нахождения интегралов с помощью вычетов.
Ответ. $p_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ (плотность двустороннего экспоненциального распределения $\mathrm{Exp}_2(1)$).
7. Являются ли характеристическими следующие функции? Если да, то укажите соответствующее распределение, если нет, то объясните почему.

$$\text{а)}\ \frac{2+3\cos t}{5};\quad \text{б)}\ \frac{2+3\sin t}{5};\quad \text{в)}\ \frac{1}{1+t};\quad \text{г)}\ \frac{1}{1+it};\quad \text{д)}\ \frac{1}{1+i|t|};\quad \text{е)}\ \frac{1}{1+t^2};\quad \text{ж)}\ \frac{1}{1+t^4}.$$

Ответ. а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) нет; е) да; ж) нет.
8. Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найдите

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right).$$

Ответ. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy$.
9. Если две случайные величины независимы и нормально распределены, то их сумма также имеет нормальное распределение. Какие еще распределения обладают аналогичным свойством?