17. Характеристические функции-1

17.1. Предварительные сведения

Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}$, $t \in \mathbb{R}$. Если ξ — *дискретная* случайная величина с распределением $\mathbb{P}(\xi = x_k) = p_k$, то $\varphi_\xi(t) = \sum\limits_k e^{itx_k} p_k$.

Если ξ — *абсолютно непрерывная* случайная величина с плотностью $p_\xi(x)$, то $\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x)\, dx$.

Свойства характеристических функций:

1) $|\varphi_\xi(t)| \le 1$ и $\varphi_\xi(0) = 1$;

2) $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$, $a, b \in \mathbb{R}$;

3) $\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)}$; в частности, если $\varphi_\xi(t)$ действительная, то она чётная;

4) $\varphi_\xi(t)$ равномерно непрерывна на числовой прямой $\mathbb{R}$;

5) если ξ и η — независимые случайные величины, то $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$;

6) если $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$, то существует непрерывная производная $\varphi^{(k)}(t)$, $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\xi^k$ и

$$\varphi_\xi(t) = 1 + \frac{(it)^1}{1!}\,\mathbb{E}\xi + \frac{(it)^2}{2!}\,\mathbb{E}\xi^2 + \ldots + \frac{(it)^k}{k!}\,\mathbb{E}\xi^k + o(|t|^k), \quad t \to 0;$$

7) характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ однозначно определяет распределение величины ξ.

17.2. Практическое занятие

1. Величина ξ имеет дискретное распределение:

ξ	-1	1
$\mathbb{P}$	$1/2$	$1/2$

, а величина $\eta \sim \mathrm{Unif}[-1, 1]$ не зависит от ξ. Вычислите характеристические функции $\varphi_\xi(t)$ и $\varphi_\eta(t)$. Найдите распределение случайной величины $\xi + \eta$.
Ответ. $\varphi_\xi(t) = \cos t$, $\varphi_\eta(t) = \frac{\sin t}{t}$, $\xi + \eta \sim \mathrm{Unif}[-2, 2]$.
2. Докажите, что если $\varphi_\xi(t)$ — периодическая функция, то ξ — дискретная случайная величина.
Указание. Покажите, что $\mathbb{E}e^{it\xi} = 1$ тогда и только тогда, когда $t\xi \in \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots\}$.
3. Докажите, что если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, то $\varphi_\xi(t) \to 0$, $t \to \infty$.
Указание. Используйте лемму Римана–Лебега.
4. Пусть (φ_k) — характеристические функции, (a_k) — неотрицательные числа такие, что $\sum a_k = 1$. Докажите, что функция $\sum a_k \varphi_k$ также является характеристической.
5. Характеристическая функция случайной величины ξ имеет вид:

а) $\cos^2 t$; б) $\dfrac{\operatorname{ch} e^{it}}{\operatorname{ch} 1}$.

Найдите распределение ξ, а также $\mathbb{E}\xi$ и $\operatorname{Var}\xi$.
Ответ. а)

ξ	-2	0	2
$\mathbb{P}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

, $\mathbb{E}\xi = 0$, $\operatorname{Var}\xi = 2$; б)

ξ	0	2	4	$\ldots$
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{\operatorname{ch} 1}$	$\frac{1}{2!\operatorname{ch} 1}$	$\frac{1}{4!\operatorname{ch} 1}$	$\ldots$

, $\mathbb{E}\xi = \operatorname{th} 1$, $\operatorname{Var}\xi = 1 + \operatorname{th} 1 - \operatorname{th}^2 1$.

17.3. Домашнее задание

6. Заполните следующую таблицу:

Название распределения	Обозначение	Распределение ξ	$\mathbb{E}\xi$	$\operatorname{Var}\xi$	$\varphi_\xi(t)$
Вырожденное	I_a	$\mathbb{P}(\xi = a) = 1$, $a \in \mathbb{R}$			
Равномерное дискретное	$\mathrm{Unif}(x_1, \ldots, x_n)$	$\mathbb{P}(\xi = x_k) = \frac{1}{n}$, $k = 1, \ldots, n$			
Биномиальное	$\mathrm{Bin}(n, p)$	$\mathbb{P}(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$			
Пуассоновское	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$			
Геометрическое	$\mathrm{Geom}(p)$	$\mathbb{P}(\xi = k) = pq^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$			
Равномерное	$\mathrm{Unif}[a, b]$	$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$			
Нормальное	$\mathcal{N}(a, \sigma^2)$	$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\}$			
Коши	$\mathrm{Cauchy}(a)$	$p_\xi(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$			
Экспоненциальное	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$			
Двустороннее экспоненциальное	$\mathrm{Exp}_2(\lambda)$	$p_\xi(x) = \frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda\lvert x\rvert}$			
Гамма-распределение	$\Gamma(\alpha, \beta)$	$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x \ge 0, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$			

Указание. Для нормального и гамма-распределения составьте дифференциальное уравнение для характеристической функции. Экспоненциальное распределение принадлежит семейству гамма-распределений. Для распределения Коши используйте, например, методы нахождения интегралов с помощью вычетов.

7. Характеристическая функция случайной величины ξ имеет вид:

$$\text{а)}\ \frac{1 + 4\cos^2 t}{5}; \qquad \text{б)}\ \frac{1}{2}\Bigl(1 - \frac{1}{2}e^{it}\Bigr)^{-1}; \qquad \text{в)}\ \frac{1}{5 - 4\cos t}.$$

Найдите распределение ξ, а также $\mathbb{E}\xi$ и $\operatorname{Var}\xi$.

Указание. Представьте характеристические функции в виде сходящихся рядов.

Ответ. а)

ξ	-2	0	2
$\mathbb{P}$	$1/5$	$3/5$	$1/5$

, $\mathbb{E}\xi = 0$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{8}{5}$; б)

ξ	0	1	2	3	$\ldots$
$\mathbb{P}$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$\ldots$

, $\mathbb{E}\xi = 1$, $\operatorname{Var}\xi = 2$; в) $\mathbb{P}(\xi = k) = \dfrac{1}{3 \cdot 2^{|k|}}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}\xi = 0$, $\operatorname{Var}\xi = 4$.