# 16. Сходимость почти наверное и сходимость по вероятности

## 16.1. Предварительные сведения

Последовательность случайных величин $(\xi_n)$ сходится *почти наверное* (*с вероятностью* 1) к случайной величине $\xi$, если

$$\mathbb{P}\{\omega: \xi_n(\omega) \to \xi(\omega) \text{ при } n \to \infty\} = 1.$$

Обозначение: $\xi_n \to \xi$ п.н.

Последовательность случайных величин $(\xi_n)$ сходится *по вероятности* к случайной величине $\xi$, если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место сходимость

$$\mathbb{P}\{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Обозначение: $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$.

Критерий сходимости почти наверное:

$$\xi_n \to \xi \text{ п.н.} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \mathbb{P}\Big\{\omega: \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\Big\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

## 16.2. Практическое занятие

**1.** Пусть $\xi_n \to \xi$ и $\xi_n \to \eta$ п.н. Докажите, что $\mathbb{P}\{\xi = \eta\} = 1$. Справедлив ли аналогичный результат для сходимости по вероятности?
**2.** Пусть $\xi_n \to \xi$ и $\eta_n \to \eta$ п.н. Докажите, что

а) $a\xi_n + b\eta_n \to a\xi + b\eta$ п.н. $(a, b \in \mathbb{R})$; б) $|\xi_n| \to |\xi|$ п.н.; в) $\xi_n\eta_n \to \xi\eta$ п.н.

Установите аналогичные результаты для сходимости по вероятности.
**3.** Пусть $(\xi_n)$ — последовательность случайных величин такая, что для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} < \infty$. Докажите, что $\xi_n \to \xi$ п.н.
**Указание.** Используйте критерий сходимости почти наверное.
**4.** Пусть

а) $\xi_n$ имеет распределение Бернулли с параметром $p_n$; б)* $\xi_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$.

При каких условиях на $p_n$ для последовательности $(\xi_n)$ имеет место сходимость по вероятности?
**Ответ.** а) $p_n \to 0$ или $p_n \to 1$; б) $np_n \to 0$.
**5.** Приведите и обсудите пример, когда $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, но $\xi_n \not\to \xi$ п.н.

## 16.3. Домашнее задание

**6.** Пусть $(\xi_n)$ — последовательность случайных величин, $\mathbb{P}\{\xi_n = e^{\alpha n}\} = e^{-\beta n}$, $\mathbb{P}\{\xi_n = e^{-\alpha n}\} = 1 - e^{-\beta n}$. При каких значениях $\alpha$ и $\beta$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$?
**Ответ.** Если $\beta = 0$, то $\alpha < 0$; если $\beta > 0$, то $\alpha > 0$.
**7.** Пусть $\xi_n \to a \neq 0$ п.н. Докажите, что $\frac{1}{\xi_n} \to \frac{1}{a}$ п.н. Установите аналогичный результат для сходимости по вероятности.
**8*.** Пусть последовательность независимых случайных величин $\xi_n$ сходится по вероятности. Докажите, что дисперсия предела равна 0.