12. Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывных случайных величин

12.1. Предварительные сведения

Пусть случайная величина ξ имеет плотность $p_\xi(x)$ и функцию распределения $F_\xi(x)$.

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно, иначе $\mathbb{E}\xi$ не существует.

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$\operatorname{Var}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x)\,dx - \Big(\int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx\Big)^2$$

при условии, что интегралы сходятся абсолютно, иначе $\operatorname{Var}\xi$ не существует.

Математическое ожидание функции g от случайной величины ξ равно

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_\xi(x)\,dx.$$

12.2. Практическое занятие

1. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин

а) $\xi \sim \mathrm{Unif}[a,b]$;

б) $\eta \sim \mathrm{Cauchy}(a)$ (плотность $p_\eta(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$, $a > 0$);

в) $\zeta \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Ответ. а) $(a+b)/2$, $(b-a)^2/12$; б) не существуют; в) $1/\lambda$, $1/\lambda^2$.

2. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0,\pi]$. Найдите $\mathbb{E}\sin\xi$, $\mathbb{E}\cos\xi$, $\operatorname{Var}\sin\xi$, $\operatorname{Var}\cos\xi$.

Ответ. $2/\pi$, 0, $1/2 - 4/\pi^2$, $1/2$.

3. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$. Найдите $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|$. Сравните ответ со значением стандартного отклонения σ.

Ответ. $\sigma\sqrt{2/\pi} \approx 0.8\sigma$.

4. Сторона квадрата, имеющая длину a, измерена с погрешностью ξ, которая равномерно распределена на отрезке $[-\varepsilon,\varepsilon]$. Найдите среднее значение и дисперсию площади квадрата S, вычисленной по результату измерения.

Ответ. $\mathbb{E}S = a^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^2$, $\operatorname{Var}S = \frac{4}{3}a^2\varepsilon^2 + \frac{4}{45}\varepsilon^4$.

5. Случайные величины $\xi_1,\dots,\xi_n$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Пусть $\eta = \max(\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\zeta = \min(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Найдите $\mathbb{E}\eta$, $\mathbb{E}\zeta$, $\operatorname{Var}\eta$, $\operatorname{Var}\zeta$.

Ответ. $\mathbb{E}\eta = \frac{n}{n+1}$, $\mathbb{E}\zeta = \frac{1}{n+1}$, $\operatorname{Var}\eta = \operatorname{Var}\zeta = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.

12.3. Домашнее задание

6. Случайная величина ξ имеет плотность $p_\xi(x) = c/(1+|x|^\alpha)$, с некоторыми $c, \alpha > 0$. При каких значениях α величина ξ имеет:

а) конечное математическое ожидание;

б) конечную дисперсию?

Ответ. а) $\alpha > 2$; б) $\alpha > 3$.

7. Дальность полета тела, брошенного со скоростью v под углом α к горизонту, равна $s = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$, где g — ускорение свободного падения. Считая, что $v = 10$ (м/с), $g = 10$ (м/с^2), а угол α равномерно распределен в пределах от 0 до $\pi/2$, найдите среднее значение, дисперсию и стандартное отклонение дальности полета.

Ответ. $\mathbb{E}s = \frac{2v^2}{\pi g} = \frac{20}{\pi} \approx 6.366$ (м), $\operatorname{Var} s = \frac{v^4}{g^2}(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}) = 100(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}) \approx 9.472$ (м^2), $\operatorname{sd} s = \sqrt{\operatorname{Var} s} = \frac{v^2}{g}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}} = 10\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}} \approx 3.078$ (м).

8. По известному «правилу трех сигм» вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания более чем на три корня из дисперсии мала. Проверьте это правило, вычислив $\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| < 3\sqrt{\operatorname{Var}\xi})$, если ξ имеет

а) показательное распределение $\operatorname{Exp}(\lambda)$;

б) равномерное распределение $\operatorname{Unif}[-1, 1]$;

в) нормальное распределение $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

Какую оценку можно получить для указанной вероятности, применив неравенство Чебышёва?

Ответ. а) ≈ 0.98168; б) 1; в) 0.9973. $\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| < 3\sqrt{\operatorname{Var}\xi}) \geq 8/9$.