11. Математическое ожидание и дисперсия дискретных случайных величин

11.1. Предварительные сведения

Пусть распределение дискретной случайной величины ξ имеет вид:

ξ	x_1	$\ldots$	x_n	$\ldots$
$\mathbb{P}$	p_1	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$\mathbb{E}\xi = \sum_i x_i p_i$$

при условии, что ряд сходится абсолютно, иначе $\mathbb{E}\xi$ не существует.

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$\operatorname{Var}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \Big(\sum_i x_i p_i\Big)^2$$

при условии, что ряды сходятся абсолютно, иначе $\operatorname{Var}\xi$ не существует.

Математическое ожидание функции g от случайной величины ξ равно $\mathbb{E}g(\xi) = \sum\limits_i g(x_i)p_i$.

11.2. Практическое занятие

1. Случайная величина ξ имеет распределение, задаваемое формулами $\mathbb{P}(\xi = k) = c/k^\alpha$, $k = 1, 2, \ldots$, $c, \alpha > 0$. При каких значениях α величина ξ имеет:

а) конечное математическое ожидание;

б) конечную дисперсию?

Ответ. а) $\alpha > 2$; б) $\alpha > 3$.

2. Брошены две игральные кости. Найдите математическое ожидание суммы выпавших очков. Как изменится ответ, если известно, что выпали разные грани?

Ответ. 7. Никак.

3. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Докажите, что $\mathbb{E}\xi = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi \geq i)$.

4. Большое число N людей сдают анализ крови. Исследование может быть организовано двумя способами.

1) Кровь каждого человека исследуется отдельно. Требуется провести N анализов.

2) Кровь k человек смешивается и анализируется полученная смесь. Если результат отрицателен, то достаточно одного анализа для этих k человек. Если результат положителен, то кровь каждого исследуется отдельно, и всего нужно провести $k + 1$ анализ.

Считая, что вероятность положительного результата равна p, найдите:

а) вероятность положительного результата в группе из k человек;

б) математическое ожидание числа анализов при втором способе исследования;

в) оптимальное значение k для $p = 0.05$.

Ответ. а) $1 - (1-p)^k$; б) $N(1 + \frac{1}{k} - (1-p)^k)$; в) 5.
5. В одной из вершин тетраэдра сидит паук. Муха ползает по ребрам тетраэдра из одной вершины в другую, выбирая каждый раз ребро наудачу. Считая, что ребро проходится за единицу времени, найдите среднее и дисперсию времени жизни мухи.
Ответ. 3 и 6.

11.3. Домашнее задание

6. Распределение случайной величины ξ определяется формулами $\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Найдите $\mathbb{E}\xi$ и $\operatorname{Var}\xi$.
Ответ. $\mathbb{E}\xi = 2$, $\operatorname{Var}\xi = \infty$.
7. При бросании трех игральных костей игрок выигрывает

- 1800 у. е., если на всех трех костях выпадает по 6 очков;
- 140 у. е., если на двух костях выпадает по 6 очков;
- 20 у. е., если только на одной кости выпадает 6 очков.

Математическое ожидание выигрыша в безобидной игре равно нулю. Какова должна быть ставка за участие в этой игре, чтобы она была безобидной?
Ответ. 25 у. е.
8. Случайная величина ξ принимает конечное число значений $0 < x_1 < \ldots < x_m$ с ненулевыми вероятностями. Вычислите пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\xi^{n+1}}{\mathbb{E}\xi^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathbb{E}\xi^n}$.
9*. Согласно законам о трудоустройстве в городе N, наниматели обязаны предоставлять всем рабочим выходной, если хотя бы у одного из них день рождения, и принимать на работу независимо от дня рождения. За исключением этих выходных, рабочие трудятся весь год из 365 дней. Наниматель хочет максимизировать среднее число человеко-дней в году. Сколько для этого нужно нанять рабочих? Найдите также среднее число выходных дней в году в этом случае.
Ответ. 364 человека, ≈ 231 выходной день.
Указание. Пусть w_n — число выходных дней в году, если нанято n рабочих. Найдите $\mathbb{E}w_n$, например, представив w_n в виде суммы индикаторов.