

10. Распределения случайных величин-3

10.1. Предварительные сведения

Если случайный вектор (ξ, η) имеет абсолютно непрерывное распределение, то его функция распределения и плотность связаны соотношением

$$p_{\xi, \eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi, \eta}(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Одномерные распределения случайных величин ξ и η имеют плотности

$$p_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi, \eta}(x, y) dy, \quad p_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi, \eta}(x, y) dx.$$

Случайный вектор принимает значение в множестве B с вероятностью

$$\mathbb{P}((\xi, \eta) \in B) = \int \int_B p_{\xi, \eta}(x, y) dx dy.$$

Если $B = [x_1, x_2) \times [y_1, y_2)$, то

$$\mathbb{P}((\xi, \eta) \in B) = F_{\xi, \eta}(x_2, y_2) - F_{\xi, \eta}(x_1, y_2) - F_{\xi, \eta}(x_2, y_1) + F_{\xi, \eta}(x_1, y_1).$$

Кроме этих формул используются сведения, применявшиеся на предыдущих занятиях.

10.2. Практическое занятие

1. Случайный вектор (ξ, η) имеет плотность $p_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} A, & x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$ Найдите значение постоянной A и одномерные плотности p_{ξ} и p_{η} . Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

Ответ. $A = \frac{1}{\pi R^2}$; $p_{\xi}(x) = p_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & |x| \leq R, \\ 0, & |x| > R; \end{cases}$ нет.

2. Случайный вектор (ξ, η) имеет абсолютно непрерывное распределение. Его функция распределения имеет вид:

$$F_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0, \\ 1 - e^{-x^2} - e^{-2y} + e^{-x^2-2y}, & x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Найдите

- совместную плотность распределения $p_{\xi, \eta}(x, y)$;
- вероятности $\mathbb{P}(-2 \leq \xi < 2, 1 \leq \eta < 3)$, $\mathbb{P}(\xi \geq 0, \eta \geq 1)$, $\mathbb{P}(\xi < 1, \eta \geq 2)$;
- функции распределения F_{ξ} и F_{η} .

Являются ли величины ξ и η независимыми?

Ответ. а) $p_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0, \\ 4xe^{-x^2-2y}, & x > 0, y > 0; \end{cases}$ б) $e^{-2} - 2e^{-6} + e^{-10}$, e^{-2} , $e^{-4} - e^{-5}$;

в) $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x^2}, & x > 0; \end{cases}$ $F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 1 - e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$ Да.

3. Случайный вектор (ξ, η) имеет совместную функцию распределения

$$F_{\xi, \eta}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} (4 \operatorname{arctg} x \operatorname{arctg} y + 2\pi \operatorname{arctg} x + 2\pi \operatorname{arctg} y + \pi^2).$$

Докажите, что ξ и η — независимые случайные величины. Найдите функции распределения F_ξ и F_η . Вычислите вероятности $\mathbb{P}(-1 \leq \xi \leq 1, 1 \leq \eta \leq \sqrt{3}), \mathbb{P}(\xi > 1, \eta > \sqrt{3})$.

Ответ. $F_\xi(x) = F_\eta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x; 1/24, 1/24$.

10.3. Домашнее задание

4. Вектор (ξ, η) имеет плотность $p_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} Cxy^2, & x \in [0, 2], y \in [0, 1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ Найдите

- значение постоянной C ;
- одномерные плотности $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$;
- функции распределения $F_\xi(x), F_\eta(y), F_{\xi, \eta}(x, y)$.

Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

Ответ. а) $C = 3/2$; б) $p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0, 2], \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$ $p_\eta(y) = \begin{cases} 3y^2, & y \in [0, 1], \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$ в) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases}$

$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ y^3, & 0 < y \leq 1, \\ 1, & y > 1; \end{cases}$ $F_{\xi, \eta}(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$. Да.

5. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид:

$$p_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0, \\ 3^{-x-y} \ln^2 3, & x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Найдите

- функцию совместного распределения $F_{\xi, \eta}(x, y)$;
- плотности распределений p_ξ и p_η случайных величин ξ и η ;
- $\mathbb{P}((\xi, \eta) \in B)$, где B — треугольник с вершинами в точках с координатами $(2, 1), (2, 2)$ и $(5, 1)$.

Являются ли ξ и η независимыми?

Ответ. а) $F_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0, \\ (1 - 3^{-x})(1 - 3^{-y}), & x > 0, y > 0; \end{cases}$ б) $p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 3^{-x} \ln 3, & x > 0; \end{cases}$

в) $14/27^2 \approx 0.0192$. Да.

6*. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид $p_{\xi, \eta}(x, y) = \frac{C}{(x^2 + y^2 + \pi)^2}$. Найдите постоянную C и одномерные плотности p_ξ и p_η . Являются ли величины ξ и η независимыми?

Ответ. $C = 1; p_\xi(x) = p_\eta(x) = \frac{\pi}{2(x^2 + \pi)^{3/2}}$; нет.

Указание. При вычислении C перейдите к полярным координатам. При нахождении p_ξ положите $y^2 + \pi = a^2$ и сделайте замену $x = a \operatorname{tg} t$.