

## 9. Распределения случайных величин-2

### 9.1. Предварительные сведения

Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы тогда и только тогда, когда

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n).$$

Дискретные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{P}(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \mathbb{P}(\xi_1 = x_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(\xi_n = x_n).$$

Абсолютно непрерывные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы тогда и только тогда, когда

$$p_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot p_{\xi_n}(x_n) \text{ почти всюду.}$$

Если  $\xi$  и  $\eta$  — величины с совместной плотностью  $p_{\xi, \eta}(x, y)$ , а  $B$  — борелевское множество, то

$$\mathbb{P}((\xi, \eta) \in B) = \int \int_B p_{\xi, \eta}(x, y) dx dy.$$

В частности, для борелевской функции  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_{g(\xi, \eta)}(z) = \int \int_{\{g(x, y) < z\}} p_{\xi, \eta}(x, y) dx dy.$$

Для независимых величин  $\xi$  и  $\eta$  с плотностями  $p_\xi$  и  $p_\eta$

$$p_{\xi + \eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y) p_\eta(x - y) dy \text{ — свертка плотностей } p_\xi \text{ и } p_\eta.$$

### 9.2. Практическое занятие

1. Совместное распределение  $p_{ij} = \mathbb{P}(\xi_1 = i, \xi_2 = j)$  случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$  задано таблицей

$i \setminus j$	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

Найдите:

- одномерные распределения  $p_{i \cdot} = \mathbb{P}(\xi_1 = i)$ ,  $p_{\cdot j} = \mathbb{P}(\xi_2 = j)$  и проверьте, являются ли величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимыми;
- совместное распределение  $q_{ij} = \mathbb{P}(\eta_1 = i, \eta_2 = j)$  случайных величин  $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ ,  $\eta_2 = \xi_1 \xi_2$ ;

в) одномерные распределения  $q_{i \cdot} = \mathbb{P}(\eta_1 = i)$ ,  $q_{\cdot j} = \mathbb{P}(\eta_2 = j)$ .

**Ответ.** а) 

$\xi_1$	-1	1
$\mathbb{P}$	1/2	1/2

, 

$\xi_2$	-1	0	1
$\mathbb{P}$	1/3	1/4	5/12

;  $\xi_1$  и  $\xi_2$  зависимы;

б)  $q_{-2,1} = 1/8$ ,  $q_{-1,0} = 1/12$ ,  $q_{0,-1} = 1/2$ ,  $q_{1,0} = 1/6$ ,  $q_{2,1} = 1/8$ , остальные  $q_{ij} = 0$ ;

в) 

$\eta_1$	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}$	1/8	1/12	1/2	1/6	1/8

, 

$\eta_2$	-1	0	1
$\mathbb{P}$	1/2	1/4	1/4

2. Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы и имеют одно и то же дискретное распределение  $\mathbb{P}(\xi = x_i) = \mathbb{P}(\eta = x_i) = p_i$ . Найдите  $\mathbb{P}(\xi = \eta)$ .

**Ответ.**  $\sum_i p_i^2$ .

3. Величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы и имеют равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ . Найдите функцию распределения и плотность  $\xi_1 + \xi_2$ .

**Ответ.**

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ z^2/2, & 0 < z \leq 1, \\ 1 - (2-z)^2/2, & 1 < z \leq 2, \\ 1, & z > 2, \end{cases}$$

$$p_{\xi_1+\xi_2}(z) = \begin{cases} z, & 0 < z \leq 1, \\ 2-z, & 1 < z \leq 2, \\ 0, & z \leq 0 \text{ или } z > 2. \end{cases}$$

4. Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы и имеют одну и ту же функцию распределения  $F(x)$ . Найдите функцию распределения случайных величин  $\eta = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\zeta = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

**Ответ.**  $F_\eta(x) = F^n(x)$ ,  $F_\zeta(x) = 1 - (1 - F(x))^n$ .

### 9.3. Домашнее задание

5. Пусть  $\xi \sim \text{Bin}(2, p)$ ,  $\eta \sim \text{Bin}(3, p)$ . Найдите распределение случайной величины  $\xi\eta$ , считая  $\xi$  и  $\eta$  независимыми.

**Ответ.**

$\xi\eta$	0	1	2	3	4	6
$\mathbb{P}$	$q^2 + q^3 - q^5$	$6p^2q^3$	$9p^3q^2$	$2p^4q$	$3p^4q$	$p^5$

6. Независимые случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  имеют показательное распределение с параметром  $\lambda > 0$ , т. е.  $p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x > 0$ . Найдите функцию распределения и плотность  $\xi_1 + \xi_2$ .

**Ответ.**  $F_{\xi_1+\xi_2}(z) = 1 - e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z}$ ,  $z > 0$ ;  $p_{\xi_1+\xi_2}(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$ ,  $z > 0$ .

7. Случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно. Найдите распределение  $\xi_1 + \xi_2$ .

**Ответ.** Распределение Пуассона с параметром  $\lambda_1 + \lambda_2$ .