

7. Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса

7.1. Предварительные сведения

Пусть A и B — некоторые события и $\mathbb{P}(B) > 0$, тогда $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$ — условная вероятность A при условии B .

Пусть A — некоторое событие, H_1, \dots, H_n — попарно несовместные события с положительными вероятностями и такие, что $A \subset \bigcup_{j=1}^n H_j$. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j) \quad (\text{формула полной вероятности})$$

Обычно события H_1, \dots, H_n называют *гипотезами*. Часто рассматриваются такие гипотезы, что $\bigcup_{j=1}^n H_j = \Omega$. В этом случае говорят, что они образуют *полную группу событий*.

Условная вероятность $\mathbb{P}(H_i|A)$ равна

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(AH_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A|H_j)} \quad (\text{формула Байеса})$$

В задачах на формулы полной вероятности и Байеса условные вероятности $\mathbb{P}(A|H_i)$ либо заданы в тексте, либо легко вычисляются.

7.2. Практическое занятие

1. В одном маленьком городке полиция разыскивает бродягу. Можно считать, что есть четыре шанса из пяти, что он находится в одном из восьми баров городка, безразлично в каком — он не отдает предпочтения ни одному из них. Двое полицейских посетили семь баров, но бродягу не обнаружили. Каковы шансы найти его в восьмом баре?

Указание. Это задача на определение условной вероятности.

Ответ. $1/3$.

2. Группа студентов, сдающая экзамен, состоит из 5 отличников, 10 хороших студентов и 15 слабых студентов. Отличник всегда получает оценку «отлично», хороший студент — «отлично» и «хорошо» с равными вероятностями, слабый студент — «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно» с равными вероятностями. Определите вероятности того, что наугад вызванный студент получит оценку «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Ответ. $1/3, 1/3, 1/6, 1/6$.

3. Число грузовых машин, проезжающих мимо бензоколонки, относится к числу легковых машин как 3:2. Вероятность того, что грузовая машина

будет заправляться, равна 0.1, а того, что будет заправляться легковая — 0.2. У бензоколонки заправляется машина. Найдите вероятность того, что это грузовая машина.

Ответ. $3/7$.

4. В магазине имеется 10 сотовых телефонов, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0.9, и 5 сотовых телефонов с аналогичной вероятностью 0.95. Найдите вероятность того, что два телефона, купленные наудачу в магазине, будут работать исправно в течение месяца.

Ответ. $\frac{3529}{4200} \approx 0.8402$.

5. Два охотника одновременно и независимо стреляют в кабана. Известно, что первый попадает с вероятностью 0.8, а второй с вероятностью 0.4. Кабан убит, и в нём обнаружена одна пуля. Как делить кабана?

Ответ. В пропорции 6:1.

7.3. Домашнее задание

6. В городе N дождливыми бывают четверть всех дней. Кроме того, замечено, что если в какой-то день дождь шел, то в двух случаях из трех он будет идти и на следующий день. Чему равна вероятность того, что завтра будет хорошая погода, если сегодня дождя не было?

Ответ. $8/9$.

7. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 25%, вторая — 35%, третья — 40% всех изделий. В из продукции брак составляет 5, 4 и 2%.

- Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?
- Случайно выбранный болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведён первой, второй, третьей машиной?

Ответ. $0.0345; \frac{125}{345}, \frac{140}{345}, \frac{80}{345}$.

8. В коробке лежат 3 новых и 3 уже использованных теннисных мяча. Для первой игры наудачу берут из коробки 2 мяча и затем их возвращают в коробку. Какова вероятность для второй игры из этой коробки наудачу вынуть 2 новых мяча?

Ответ. $2/25$.

9. В урне лежало 8 белых и 4 чёрных шара. Один шар потерян, и цвет его неизвестен. Из урны без возвращения извлекли два шара, и оба оказались белыми. Какова вероятность того, что был потерян чёрный шар? Каков будет ответ задачи, если результат извлечения двух шаров неизвестен?

Ответ. $2/5; 1/3$.

10. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0.6, стрелок B — с вероятностью 0.5, стрелок C — с вероятностью 0.4. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал стрелок C в мишень или нет? Найдите соответствующие вероятности.

Ответ. $10/19$ и $9/19$, т. е. вероятнее, что C попал в мишень.