6. Геометрическая схема

6.1. Предварительные сведения

Эксперимент удовлетворяет условиям *геометрического определения вероятности*, если его исходы можно изобразить точками некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с конечной мерой Лебега так, что вероятность попадания точки в любую часть $A \subset \Omega$ не зависит от формы или расположения A внутри Ω, а зависит лишь от меры области A и, следовательно, пропорциональна этой мере:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где $\mu(A)$ обозначает меру Лебега области A.

6.2. Практическое занятие

1. В интервале времени $[0, T]$ в случайный момент времени u появляется сигнал длительности Δ. Приёмник включается в случайный момент времени $v \in [0, T]$ на время t. Найдите вероятность обнаружения сигнала.
Ответ. $1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{\Delta}{T})^2 - \frac{1}{2}(1 - \frac{t}{T})^2$.
2. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых чисел из отрезка $[0, 1]$ будет меньше 1, а их произведение больше $2/9$?
Ответ. $\frac{1}{6} - \frac{2}{9}\ln 2$.
3. На плоскость нанесены параллельные прямые на одинаковом расстоянии a друг от друга. На плоскость наудачу бросается монета радиуса r ($r < a/2$). Найдите вероятность того, что монета не пересечет ни одну из прямых.
Ответ. $1 - 2r/a$.
Указание. Рассмотрите расстояние от центра монеты до ближайшей прямой.
4. Случайная точка A равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$ и делит этот отрезок на две части. Пусть η_1 — длина большей части, η_2 — длина меньшей части. Найдите $\mathbb{P}(\eta_1 < x)$, $\mathbb{P}(\eta_2 < x)$ при любом $0 \le x \le 1$.
Ответ. $\max(0, 2x - 1)$ и $\min(2x, 1)$.
Указание. Начните со случаев $x = 1/5$ и $x = 4/5$.
5. В шар радиуса R наудачу бросаются N точек. Найдите вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a ($0 < a < R$).
Ответ. $(1 - (a/R)^3)^N$.

6.3. Домашнее задание

6. Две точки выбираются наудачу из отрезка $[-1, 1]$. Пусть p и q — координаты этих точек. Найдите вероятность того, что уравнение $x^2 + px + q = 0$

- будет иметь вещественные корни;

- будет иметь кратный корень.

Ответ. 13/24; 0.
7. На отрезке длины l наудачу выбираются две точки. Какова вероятность, что из трёх отрезков, на которые делится исходный отрезок выбранными точками, можно составить треугольник?
Ответ. 1/4.
8. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 1. Найдите вероятности следующих событий:

а) расстояние от A до фиксированной стороны квадрата не превосходит x;

б) расстояние от A до ближайшей стороны квадрата не превосходит x;

в) расстояние от A до центра квадрата не превосходит x;

г) расстояние от A до фиксированной вершины квадрата не превосходит x.

Ответ. а) $\min(x, 1)$; б) $4x(1-x)$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$, 1 при $x \geq \frac{1}{2}$; в) πx^2 при $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $x^2(\pi - 4\arccos\frac{1}{2x}) + \sqrt{4x^2-1}$ при $x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, 1 при $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{\pi x^2}{4}$ при $x \in [0, 1]$, $x^2(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{x}) + \sqrt{x^2-1}$ при $x \in [1, \sqrt{2}]$, 1 при $x \geq \sqrt{2}$.
9. На отрезок наудачу бросают три точки, одну за другой. Какова вероятность того, что третья по счету точка попадёт между двумя первыми?
Ответ. 1/3.