5. Схема Бернулли-2

5.1. Предварительные сведения

Имеется серия из n независимых экспериментов, каждый из которых может закончится «успехом» с вероятностью p и «неудачей» с вероятностью $q = 1 - p$. Вероятность $P_n(k)$ того, что в этой серии будет ровно k «успешных» экспериментов может быть вычислена по трем формулам:

- точной формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;
- приближённой формуле Муавра–Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2};$$

- приближённой формуле Пуассона: $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$.

Приближённые формулы применяются при больших значениях n. Формуле Пуассона стоит отдавать предпочтение, когда p мало и $np \le 10$, иначе лучше использовать формулу Муавра–Лапласа.

Для оценки вероятности $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что число успехов будет заключено в пределах от k_1 до k_2, можно использовать интегральную формулу Муавра-Лапласа с поправкой непрерывности:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \frac{(k_1 - 1/2) - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{(k_2 + 1/2) - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$.

Значения функции $\Phi(x)$ затабулированы или вычисляются с помощью функций `=НОРМСТРАСП(x)` в `Microsoft Excel` и `=NORMSDIST(x)` в `Open Office Calc`). Если $x \ge 4$, то $\Phi(x) \approx 1$, если $x \le -4$, то $\Phi(x) \approx 0$.

В таблицах чаще приводятся значения функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$. Функция $\Phi_0(x)$ нечётная, т. е. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$, и связана с функцией $\Phi(x)$ соотношением $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$.

5.2. Практическое занятие

1. Пусть $k(n)$ — число успехов в n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $p = 1/2$. Оцените вероятности $\mathbb{P}\{|k(n) - \frac{n}{2}| \le \frac{\sqrt{n}}{2}\}$, $\mathbb{P}\{|k(n) - \frac{n}{2}| \le \sqrt{n}\}$ и $\mathbb{P}\{|k(n) - \frac{n}{2}| \le \frac{3\sqrt{n}}{2}\}$ при больших значениях n.
Ответ. ≈ 0.6827, ≈ 0.9545, ≈ 0.9973.
2. В первые классы должно быть принято 200 детей. Определите вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0.515.
Ответ. ≈ 0.0515.
3. При транспортировке изделий с оптовой базы в магазин вероятность повреждения отдельного изделия равна 0.005. Оцените вероятность того,

что из 400 изделий как минимум 3 штуки окажутся поврежденными, считая повреждения отдельных изделий независимыми.
Ответ. ≈ 0.3233.
4. В тесто массы $M = 1000$ кг добавляют n изюминок и делают булочки. Расход теста на каждую булочку составляет $m = 100$ г. Булочка считается «булочкой с изюмом», если в ней есть по крайней мере одна изюминка. Найдите

1) вероятность того, что наудачу взятая булочка окажется «булочкой с изюмом»;

2) оценку вероятности того, что в булочке будет k изюминок;

3) n, при котором с вероятностью 0.99 наудачу взятая булочка является «булочкой с изюмом»?

Ответ. 1) $1-(1-\frac{m}{M})^n$; 2) $\approx \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}$, где $\lambda = \frac{nm}{M}$; 3) $\frac{-2}{\lg(1-m/M)} \approx 46\,049$.
5. Из таблицы случайных чисел отбирают числа, делящиеся на 3, до тех пор, пока не наберется 1025 таких чисел. Найдите приближенное значение вероятности того, что потребуется таблица, содержащая более 3000 чисел.
Ответ. ≈ 0.8287.

5.3. Домашнее задание

6. Всхожесть семян данного растения равна 0.9. Найдите вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 800 и 830.
Ответ. ≈ 0.867.
7. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.01. Найдите приближенное значение вероятности того, что при 100 выстрелах будет не больше трёх попаданий.
Ответ. $\frac{8}{3e} \approx 0.981$.
8. Корректура в 500 страниц содержит 300 опечаток. Найдите тремя способами вероятность того, что на наудачу взятой странице будет не менее трех опечаток.
Ответ. Точная формула: 0.02298; формула Пуассона: 0.02312; интегральная формула Муавра-Лапласа: 0.007 (плохая точность).
9. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два различных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько должно быть мест в каждом из гардеробов, чтобы в среднем в 99 случаях из 100, все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотрите два случая:

1) зрители приходят парами;

2) зрители приходят поодиночке.

Предполагается, что зрители выбирают входы с равными вероятностями.
Ответ. 1) 558; 2) 541.