

## 4. Схема Бернулли-1

### 4.1. Предварительные сведения

Схема Бернулли служит математической моделью  $n$  независимых случайных экспериментов, каждый из которых имеет два исхода, условно называемых «успехом» и «неудачей». Вероятность «успеха» не меняется от эксперимента к эксперименту и равна  $p$ . Вероятность «неудачи» также постоянна и равна  $q = 1 - p$ .

Вероятность того, что в серии из  $n$  экспериментов будет ровно  $k$  «успешных», обозначается  $P_n(k)$  и равна  $C_n^k p^k q^{n-k}$ .

Вероятность того, что в серии из  $n$  экспериментов будет от  $k_1$  до  $k_2$  «успешных» включительно, обозначается  $P_n(k_1, k_2)$  и равна  $\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$ .

Наиболее вероятное число успешных исходов в серии из  $n$  испытаний равно  $[np + p]$ , если  $np + p$  не является целым числом, и пара  $np - q$  и  $np + p$ , если  $np + p$  целое число.

При решении задач рекомендуется четко сформулировать в чем состоит отдельный эксперимент, какой из двух исходов вы называете «успехом», и только после этого приступать к вычислениям.

### 4.2. Практическое занятие

1. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна  $1/10$ . Каковы вероятности того, что сообщение из 10 знаков

- 1) не будет искажено;
- 2) содержит ровно три искажения;
- 3) содержит не более трех искажений?

**Ответ.** 1)  $\approx 0.349$ ; 2)  $\approx 0.057$ ; 3)  $\approx 0.987$ .

2. Вероятность успеха в каждом испытании схемы Бернулли равна  $p$ . Найдите вероятность того, что  $k$ -й по порядку успех происходит при  $l$ -м испытании.

3. Из множества  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  случайно и независимо выбираются два подмножества  $A_1$  и  $A_2$  так, что каждый элемент из  $S$  независимо от других элементов с вероятностью  $p$  включается в подмножество  $A_1$  и с вероятностью  $q = 1 - p$  не включается. Найдите вероятность того, что  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ .

**Указание.** Найдите  $\mathbb{P}(x \notin A_1 \cap A_2)$ .

**Ответ.**  $(1 - p^2)^N$ .

4. Для того, чтобы узнать, сколько в озере рыб, отлавливают 1000 рыб, метят их и выпускают обратно в озеро. Найдите все возможные варианты численности рыб в озере, для каждого из которых будет наибольшей будет наибольшей вероятностью встретить среди вновь пойманных 150 рыб 10 помеченных? Считается, что после поимки рыба вновь отпускается в озеро.

**Ответ.**  $13728 \leq N \leq 15100$ .

5. Каждую секунду с вероятностью  $p$  независимо от других моментов времени по дороге проезжает автомобиль. Пешеходу для перехода дороги необходимо 3 секунды. Какова вероятность того, что подошедший к дороге пешеход будет ожидать возможности перехода

- 1) 3 секунды;
- 2) 4 секунды;
- 3) 5 секунд?

**Ответ.** 1)  $pq^3$ ; 2)  $(1 - q^3)pq^3$ ; 3)  $(1 - q^3 - pq^3)pq^3$ .

### 4.3. Домашнее задание

6. **Проблема Джона Смита, 1693 г.** Одинаковы ли шансы у трех человек, если первому нужно получить хотя бы одну шестерку из 6 бросаний игральной кости, второму хотя бы две шестерки из 12 бросаний, третьему не менее трех шестерок в 18 бросаниях? Найдите соответствующие вероятности.

**Ответ.**  $\approx 0.665$ ,  $\approx 0.619$ ,  $\approx 0.597$ .

7. В жюри, состоящем из нечетного числа членов, каждый независимо от остальных принимает правильное решение с вероятностью 0.7. Каково минимальное число членов жюри, при котором общее решение, выносимое большинством голосов, будет верным с вероятностью не меньшей 0.9?

8. **Задача Банаха.** Некий курящий математик носит с собой две коробки спичек. Первоначально в каждой из них было по  $n$  спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найдите вероятность того, что когда математик вынет в первый раз пустую коробку, в другой коробке останутся  $r$  спичек.

**Указание.** Математик вынул  $2n - r$  спичек; столько же раз выбиралась одна из коробок.

9. Стоимость проезда в автобусе равна  $x$  рублей, а контролер попадается в среднем 3 раза в месяц. Каков должен быть штраф за безбилетный проезд, чтобы с вероятностью не менее 0.9 «заяц», едущий без билета ежедневно (60 раз в месяц), имел бы расходы не меньшие, чем у «честного человека»?

**Ответ.**  $60x$ .