3. Комбинаторика-2

3.1. Практическое занятие

1. Задача о совпадениях. Пусть урна содержит M шаров, занумерованных числами $1, \ldots, M$. Производится упорядоченная выборка объема n с возвращением. Постройте вероятностное пространство. Какова вероятность того, что построенная выборка окажется выборкой без повторений? Исследуйте асимптотику этой вероятности при больших M и малых n.
Ответ. $\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_n),\ a_i = 1, \ldots, M\}$, $|\Omega| = M^n$, $\mathbb{P}(A) = (1 - \frac{1}{M}) \ldots (1 - \frac{n-1}{M})$.
2. Выигрыш в лотерею. Имеются M билетов, занумерованных числами $1, \ldots, M$, из которых n билетов с номерами $1, \ldots, n$ — выигрышные. Вы покупаете n билетов. Постройте вероятностное пространство и найдите вероятность того, что по крайней мере один билет будет выигрышным? Исследуйте асимптотику этой вероятности при $M = n^2$ и $n \to \infty$.
Ответ. $\Omega = \{\omega : \omega = [a_1, \ldots, a_n],\ a_i \text{ различны}, a_i = 1, \ldots, M\}$, $|\Omega| = C_M^n$, $\bar{A} = \{\omega : \omega = [a_1, \ldots, a_n],\ a_i \text{ различны}, a_i = n+1, \ldots, M\}$ — событие, когда среди купленных билетов нет выигрышных, $1 - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{C_{M-n}^n}{C_M^n} = (1 - \frac{n}{M})(1 - \frac{n}{M-1}) \ldots (1 - \frac{n}{M-n+1})$. При $M = n^2$ имеем: $\mathbb{P}(\bar{A}) \approx (1 - \frac{n}{n^2})^n \to e^{-1}$, так что $\mathbb{P}(A) \approx 1 - e^{-1} \approx 0.632$.
3. Из множества чисел $\{1, \ldots, N\}$ случайно выбирается число a. Найдите $\lim\limits_{N \to \infty} p_N$, где p_N — вероятность того, что $a^2 - 1$ делится на 10.
Ответ. $1/5$.
4*. При игре в покер игроку из полной колоды в 52 карты сдают 5 карт. Найдите вероятность того, что у игрока выпадет комбинация:

1) «ройял-флеш» — 10, В, Д, К, Т одной масти;
2) «стрит-флеш» — 5 последовательных по значению карт одной масти (включая Т, 2, 3, 4, 5);
3) «каре» — четыре карты одного значения;
4) «фул-хаус» — три карты одного значения и две карты другого;
5) «флеш» — пять карт одной масти;
6) «стрит» — 5 последовательных по значению карт произвольных мастей (включая Т, 2, 3, 4, 5);
7) «сет» — три карты одного значения и две других различных значений;
8) «две пары» — две различные пары карт и одна карта отличного от них значения;
9) «пара» — пара карт и три карты различных значений;
10) «старшая карта» — все остальные комбинации.

Указанные комбинации упорядочены по старшинству от самой сильной до самой слабой.

Ответ. 1) $\frac{4}{C_{52}^5} = \frac{1}{649\,740} \approx 1.539 \cdot 10^{-6}$; 2) $\frac{9 \cdot 4}{C_{52}^5} = \frac{3}{216\,580} \approx 1.385 \cdot 10^{-5}$; 3) $\frac{13 \cdot 48}{C_{52}^5} = \frac{1}{4165} \approx 2.4 \cdot 10^{-4}$; 4) $\frac{A_{13}^2 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{6}{4165} \approx 1.44 \cdot 10^{-3}$; 5) $\frac{4 \cdot C_{13}^5 - 40}{C_{52}^5} = \frac{5108}{2\,598\,960} \approx 1.965 \cdot 10^{-3}$; 6) $\frac{10 \cdot 4^5 - 40}{C_{52}^5} = \frac{10\,200}{2\,598\,960} \approx 3.925 \cdot 10^{-3}$; 7) $\frac{13 \cdot C_{12}^2 \cdot C_4^3 \cdot 4 \cdot 4}{C_{52}^5} = \frac{88}{4165} \approx 0.0211$; 8) $\frac{C_{13}^2 \cdot 11 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot 4}{C_{52}^5} = \frac{198}{4165} \approx 0.0475$; 9) $\frac{13 \cdot C_{12}^3 \cdot C_4^2 \cdot 4^3}{C_{52}^5} = \frac{1760}{4165} \approx 0.4226$; 10) $\frac{(C_{13}^5 - 10) \cdot (4^5 - 4)}{C_{52}^5} = \frac{1\,302\,540}{2\,598\,960} \approx 0.5012$.

5*. Тасуются две колоды, в каждой из которых по 52 карты. Затем выбираются по одной карте из каждой колоды до тех пор, пока вынимаемые в очередной раз карты не совпадут или не закончатся колоды. Какова вероятность того, что совпадение всё-таки произойдет?

Ответ. ≈ 0.632.

3.2. Домашнее задание

6. Дворцовый чеканщик из 12 монет сделал 4 фальшивых. Король подозревает чеканщика и решает проверить половину монет. При этом чеканщику предоставляется выбор: смерть за 1 или 3 фальшивые монеты и тюрьма за 2 фальшивые монеты или, наоборот, смерть за 2 фальшивые монеты и тюрьма за 1 или 3 фальшивые монеты. Что выбрать чеканщику? Найдите вероятности соответствующих событий.

7. Исходя из вероятностных соображений, докажите, что для любых натуральных чисел $k \le r \le n$ справедливо тождество $\sum\limits_{j=0}^{k} C_r^j C_{n-r}^{k-j} = C_n^k$.

8. По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, $N \ge 4$, выбираются числа X и Y. Что больше,

$$p_2 = \mathbb{P}\{X^2 - Y^2 \text{ делится на } 2\} \text{ или } p_3 = \mathbb{P}\{X^2 - Y^2 \text{ делится на } 3\}?$$

9*. Парадокс второго туза. Из колоды в 52 карты Вам дают 13 карт. Допустим, что у Вас есть туз. Пусть P — вероятность того, что у Вас есть второй туз. Теперь допустим, что, взяв карты, Вы увидели, что у Вас есть туз пик. Пусть Q — вероятность того, что у Вас есть второй туз. Докажите, что $P < 1/2 < Q$. Как бы Вы объяснили этот парадокс?

Ответ. $P \approx 0.37$, $Q \approx 0.56$.

10*. Билет общественного транспорта имеет шестизначный номер (от 000 001 до 999 999) и считается «счастливым», если сумма первых трёх его цифр совпадает с суммой последних трёх цифр. Найдите вероятность получения счастливого билета от кондуктора.