

2. Комбинаторика-1

2.1. Предварительные сведения

В классическом определении вероятности все элементарные исходы равновероятны, а вероятность события A задается формулой:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}},$$

при этом *благоприятными* называются элементарные исходы, составляющие событие A . Подсчет числа исходов производится по правилам комбинаторики и базовым формулам для числа перестановок $P_n = n!$, размещений $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $A_n^k = n^k$ и сочетаний $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_n^k = C_{n+k-1}^k$.

При решении задачи стоит пояснить, действительно ли элементарные исходы равновероятны.

2.2. Практическое занятие

1. Сколько различных слов можно составить из слова «математика» с помощью перестановок букв?

Ответ. 151 200.

2. Что вероятнее, то, что шестизначный номер автобусного билета содержит цифру 5, или что не содержит ее? Найдите эти вероятности. Замечание: номера 000000 не бывает.

Ответ. ≈ 0.531 и ≈ 0.469 .

3. Какова вероятность того, что трехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе состоит

- а) из одинаковых цифр; б) из разных цифр?

Замечание: номера 000 не бывает.

Ответ. а) ≈ 0.009 ; б) ≈ 0.721 .

4. Какова вероятность того, что четырехзначное число, которое может содержать только цифры 1, 2, 3, 4, 5 (может не раз), делится на 4?

Ответ. $1/5$.

5. На шахматной доске стоят 2 ладьи. Какова вероятность того, что они не бьют друг друга? Решите ту же задачу для n ладей.

Ответ. $7/9$ (для двух ладей).

6. Из полной колоды для игры в преферанс (32 карты) вытянули 10 карт. Какова вероятность того, что среди этих карт есть

- а) хотя бы один туз;
б) ровно один туз;
в) не менее двух тузов;
г) ровно два туза?

Ответ. а) ≈ 0.797 ; б) ≈ 0.428 ; в) ≈ 0.368 ; г) ≈ 0.289 .

7. Генуэзская лотерея. Участники покупают билеты, на которых написано несколько чисел от 1 до 90. Стоимость одного билета не зависит от количества написанных на нем чисел. В день розыгрыша из мешка с жетонами, помеченными числами от 1 до 90, вынимают 5 жетонов. Выигрывают те билеты, на которых *все* написанные числа содержатся среди вытянутых жетонов. При этом осуществляются следующие выплаты по выигрышным билетам:

- с одним числом — 15 стоимостей билета;
- с двумя числами — 270 стоимостей билета;
- с тремя числами — 5500 стоимостей билета;
- с четырьмя числами — 75 000 стоимостей билета;
- с пятью числами — 1 000 000 стоимостей билета.

Рассчитайте доходность этой лотереи.

2.3. Домашнее задание

8. Из полной колоды в 36 карт вытягивают 2 карты. Найдите вероятность того, что

- а) все карты одного цвета; б) все карты разных цветов?

Решите ту же задачу для 4 карт.

Ответ. Для двух карт а) $17/35$; б) $18/35$. Для четырех карт а) $8/77$; б) 0.

9. В урне 10 белых, 20 черных и 30 красных шаров. Наудачу вынимаются три шара. Какова вероятность, что все они будут

- а) разного цвета; б) одного цвета?

Ответ. а) $300/1711$; б) $266/1711$.

10*. Надо послать 6 срочных писем. Каждое из писем можно вручить одному из 3 курьеров. Сколькими способами это можно сделать? Какова вероятность того, что каждый курьер получит по крайней мере одно письмо?

Ответ. 729, $20/27$.

Указание. Сначала найдите, сколькими способами можно выдать все письма одному курьеру; потом определите количество способов, которыми письма можно распределить между двумя курьерами.

11. Найдите вероятность того, что в группе из n человек у кого-то совпадут дни рождения. Выведите формулу и вычислите соответствующие вероятности при $n = 10, 20, 22, 23, 30, 50, 100$.

Ответ. 0.117, 0.411, 0.476, 0.507, 0.706, 0.970, $1 - 3 \cdot 10^{-7}$.