1. Операции над случайными событиями

1.1. Предварительные сведения

Вероятностное пространство — это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где Ω — множество всех элементарных исходов, $\mathcal{F}$ — набор подмножеств из Ω, которые считаются случайными событиями ($\mathcal{F}$ должно быть σ-алгеброй), $\mathbb{P}$ — мера на $\mathcal{F}$, причем $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Пусть $A, B \in \mathcal{F}$ — случайные события. Тогда $AB \equiv A \cap B$ — произошли оба события («A и B»), $A \cup B$ — произошло хотя бы одно из событий («A или B»), $\bar{A}$ — событие A не произошло, Ω — достоверное событие, $\varnothing$ — невозможное событие.

$\mathbb{P}(A)$ — вероятность, что событие A произошло.

Свойства вероятности:

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$, причем, если A и B — несовместны ($AB = \varnothing$), то $\mathbb{P}(A + B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Если события A и B происходят в *независимых экспериментах*, то $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

При решении задач используются интуитивные понятия о вероятности и независимости. Например, вероятность выпадения заданного числа очков на верхней грани игрального кубика равна $1/6$ и результаты последовательных бросаний кубиков независимы.

1.2. Практическое занятие

1. A, B, C — три произвольных события. Найдите выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C

1) произошло только A;
2) произошли A и B, но C не произошло;
3) все три события произошли;
4) произошло по крайней мере одно из этих событий;
5) произошло по крайней мере два события;
6) произошло ровно одно событие;
7) произошло ровно два события;
8) ни одно событие не произошло;
9) произошло не больше двух событий.

2. Два электрических элемента соединяются в цепь при помощи последовательного (параллельного) соединения. Вероятность, что элементы пропускают ток, равны p_1 и p_2. Какова вероятность того, что по цепи идет ток?

Какова вероятность, что цепь исправно работает? Решите задачу для случая более сложной схемы, состоящей из пяти элементов, соединённых как последовательно, так и параллельно.

3. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Найдите вероятность выигрыша для каждого игрока. Опишите вероятностное пространство этой задачи.

4. Рассмотрим четыре кубика A (на гранях изображены три единицы и три пятерки), B (четыре двойки и две шестёрки), C (шесть троек) и D (два нуля и четыре четверки). Будем считать, что один кубик сильнее другого, если первый кубик чаще выигрывает у второго (на верхней грани выпадает большее количество очков). Докажите, что кубик B имеет вдвое большие шансы на выигрыш по сравнению с кубиком A, кубик C вдвое сильнее кубика B, игральная кость D побеждает C с таким же преимуществом и, наконец, A оказывается еще в два раза сильнее, чем D! Согласуется ли этот результат с вашими представлениями о том, что всегда должен существовать «самый лучший» кубик, побеждающий все остальные?

5. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, а $\mathcal{A}$ состоит из всевозможных открытых интервалов (a, b), где $a < b$. Покажите, что $\mathcal{A}$ не является σ-алгеброй. Пусть $\mathcal{B} = \sigma\{\mathcal{A}\}$. Докажите, что $\mathbb{R} \in \mathcal{B}$, полуинтервалы и отрезки $[a, b), (a, b], [a, b] \in \mathcal{B}$, любое одноточечное множество $\{a\} \in \mathcal{B}$, множество целых чисел $\mathbb{Z} \in \mathcal{B}$.

1.3. Домашнее задание

6. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$ — вещественная прямая. Является ли класс множеств $\mathcal{A} = \Big\{\Omega, \varnothing, [0,1], \{0\}\Big\}$ алгеброй? Если нет, то как его дополнить до алгебры? Является ли результат пополнения σ-алгеброй?

7. Бросаются две игральные кости. Пусть A — событие, состоящее в том, что сумма очков нечётная, B — событие, что хотя бы на одной из костей выпала единица. Постройте вероятностное пространство, считая, что все 36 элементарных событий равновероятны. Опишите события AB, $A \cup B$, $A \setminus B$ в терминах элементарных событий и найдите их вероятности.

8. Первый игрок бросает одну, а второй — две симметричные монеты. Выигрывает тот, у кого выпадет больше гербов. В случае ничьей игра повторяется. Найдите вероятность выигрыша для каждого игрока.

9. Симметричная монета бросается до тех пор, пока она два раза подряд не выпадет одной стороной. Опишите пространство элементарных событий. Найдите вероятности следующих событий: а) опыт кончится до шестого бросания; б) потребуется чётное число бросаний.

10. Контроль изделий состоит из двух независимых проверок. В результате каждой проверки изделие, удовлетворяющее стандарту, может быть отбраковано с вероятностью 0.05, а бракованное изделие может быть принято с вероятностью 0.1. Изделие считается исправным, если оно прошло обе проверки. Найдите вероятности событий: а) бракованное изделие признано исправным; б) изделие, удовлетворяющее стандарту, забраковано.