Содержание

Элементарная теория вероятностей в задачах

Предисловие

Материалы данного сборника заданий были подготовлены и использовались для проведения занятий со школьниками девятых классов в Летней Академии Естественных Наук, которая работала под г. Тарой в августе 1998 года (ЛАЕН-98). В основу были положены занимательные задачи и другие материалы из различных источников (см. список литературы). Все задачи сопровождаются решениями и ответами. Главная идея предлагаемой подборки задач состоит в преподнесении предмета теории вероятностей в интересной и увлекательной форме. Автор сборника надеется на то, что этот материал может с успехом использоваться в работе со школьниками и студентами при изучении комбинаторики и элементов теории вероятностей.

1 Введение в теорию вероятностей

При решении задач этого параграфа используются интуитивные понятия о вероятности. Например, вероятность выпадения герба при бросании монеты или рождения мальчика в семье считается равной $1/2$, вероятность выпадения заданного числа очков на верхней грани игрального кубика — $1/6$, а вероятность того, что произойдет один из десяти благоприятных исходов при наличии шестнадцати равновозможных исходов — $10/16$. Кроме слов “вероятность выигрыша” в условиях задач могут встречаться такие обороты как “шансы на успех” и т. д.

Задачи.

1. Рассмотрим всевозможные семьи с двумя детьми. Половина из них “удачные”, то есть число мальчиков в таких семьях совпадает с числом девочек. Обстоит ли аналогично дело и для семей с четырьмя детьми?

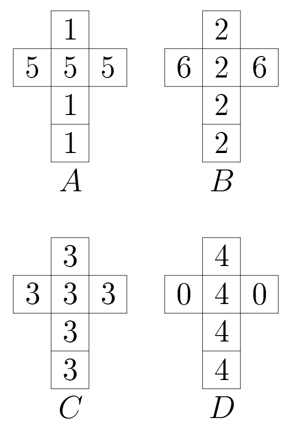
2. Однажды Петров и Васечкин играли в кости. Они по очереди бросали два игральных кубика. Если сумма выпавших очков оказывалась равной 7, то выигрывал Петров, а если сумма оказывалась равной 8, то побеждал Васечкин. У кого из них вероятность выигрыша выше и на сколько?

3. Три охотника одновременно стреляют в зайца. Шансы на успех у первого охотника расцениваются как 3 из 5, второго — 3 из 10 и, наконец, для третьего охотника они составляют всего лишь 1 из 10. Какова вероятность того, что заяц будет убит?

4. Это был чрезвычайно опасный автопробег. Он начинался с маленького и очень узкого моста, где один из пяти автомобилей падал в воду. Затем следовал ужасный крутой вираж, на котором три машины из десяти попадали в кювет. Далее на пути встречался настолько темный и извилистый туннель, что одна из десяти машин разбивалась в нем. А последний участок пути проходил по песчаной дороге, где два автомобиля из пяти безнадежно увязали в песке. Требуется найти общий процент машин, попавших в аварию за время автопробега.

5. Возьмите наугад какую-нибудь карту из моей колоды, а затем суньте ее обратно. Проделайте так трижды. У вас есть 19 шансов из 27 вытянуть таким образом по крайней мере одну картинку (короля, даму или валета), потому что доля карт с картинками в моей колоде равна... Закончите, пожалуйста, последнюю фразу.

6. Рассмотрим четыре кубика A, B, C и D, развертки которых приведены на рисунке. Будем считать, что один кубик сильнее другого, если первый кубик чаще выигрывает у второго (на верхней грани выпадает большее количество очков). Докажите, что кубик B имеет вдвое большие шансы на выигрыш по сравнению с кубиком A, кубик C вдвое сильнее кубика B, игральная кость D побеждает C с таким же преимуществом и, наконец, A оказывается еще в два раза сильнее, чем D! Согласуется ли этот результат с вашими представлениями о том, что всегда должен существовать "самый лучший" кубик, побеждающий все остальные? Какие практические применения вы можете предложить для данной игры?



2 Комбинаторика и вероятность

Рассмотрим подробнее вопрос о том, что такое вероятность.

Определение. Событие, которое при одних и тех же условиях может как происходить, так и не происходить, называется *случайным событием.* Мы будем обозначать события заглавными латинскими буквами, возможно с индексами.

Примеры.

$$\begin{aligned} A &= \{\text{на верхней грани кубика выпала шестерка}\}, \\ B &= \{\text{проросло зерно пшеницы}\}, \\ C &= \{\text{в столовой на полдник дали компот}\}. \end{aligned}$$

Определение. Событие, которое всегда происходит, называется *достоверным* и обозначается символом Ω. Событие, которое не происходит никогда, называется *невозможным* и обозначается символом $\emptyset$.

Примеры.

$$\begin{aligned} \emptyset &= \{\text{на игральном грани кубике выпала семерка}\}, \\ \Omega &= \{\text{на игральном кубике выпало от 1 до 6 очков}\}. \end{aligned}$$

Определение. *Случайный эксперимент* — это набор условий, в которых наблюдаются случайные события, и совокупность событий, фиксируемых в эксперименте. Если эксперимент случаен, то его повторение будет сопровождаться, вообще говоря, различными событиями.

Рассмотрим один пример случайного эксперимента, который будет иметь в дальнейшем очень важное значение.

Пусть имеется случайный эксперимент с конечным числом исходов (событий, фиксируемых в эксперименте). Назовем каждый исход *элементарным событием.* Предположим, что всего имеется n элементарных исходов. Пусть A — случайное событие, происходящее в m исходах, которые для события A называются *благоприятными.*

Определение. *Вероятностью* события A, определенной по *классической схеме*, называется число $\mathbb{P}(A) = \dfrac{m}{n}$.

Предположим, что случайный эксперимент имеет *равновозможные* элементарные исходы. Тогда разумно считать, что *вероятность одного исхода* равна $1/n$, а если нас интересуют m исходов, то вероятность того, что произойдет один из благоприятных исходов, должна быть равна m/n. Выходит, что классическая схема как раз и предназначена для описания таких случайных экспериментов.

В задачах этого параграфа главное — подсчитать, сколько имеется равновозможных исходов, а также, сколько из них являются благоприятными. В таких вычислениях существенную помощь оказывают правила и формулы комбинаторики.

Комбинаторика — это наука о способах подсчета возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих заданным ограничениям. Имеется два основных правила комбинаторики:

Правило суммы. Пусть существует m способов составить комбинацию объектов, удовлетворяющую условию A, и n способов составить комбинацию объектов, удовлетворяющую условию B, причем нет комбинаций, удовлетворяющих сразу двум условиям. Тогда имеется $m+n$ комбинаций, удовлетворяющих или условию A, или условию B.

Правило произведения. Пусть имеется m способов выбрать объект A, и вне зависимости от выбора первого объекта существует n способов выбрать объект B. Тогда упорядоченную пару объектов (A, B) можно составить mn способами.

Любую задачу по комбинаторике можно решить с использованием только этих двух правил. Однако, удобнее применять следующие понятия комбинаторики и связанные с ними формулы.

Перестановки. Предположим, что имеется n различных объектов. Каждый способ выстроить эти объекты в один ряд называется *перестановкой*. Докажем, что число перестановок из n объектов равно $n!$ Применим правило произведения. На первое место можно поставить любой из n имеющихся объектов, на второе место (вне зависимости от первого выбранного объекта) — любой из оставшихся $n-1$ объектов. По правилу произведения заключаем, что первые два места в перестановке можно заполнить $n \cdot (n-1)$ способами. Продолжая выставлять объекты в ряд, используя правило произведения, мы видим, что всего имеется $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ различных перестановок. Обозначим число возможных перестановок из n объектов через P_n.

Размещения. Предположим, как и в предыдущем случае, что имеется n различных объектов. Но теперь будем выстраивать в ряд не все объекты, а только k объектов из n имеющихся ($k < n$). Такие комбинации объектов назовем *размещениями*. Действуя по правилу произведения, получим, что число всех возможных размещений равно $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Обозначим количество всех возможных размещений из n объектов по k через A_n^k. Заметим, что $A_n^n = P_n$.

Сочетания. Рассмотрим все возможные размещения из n объектов по k. Если мы перестанем различать те размещения, которые отличаются порядком входящих в них объектов, а будем интересоваться лишь качественным составом размещения, то придем к следующему определению. *Сочетанием* из n объектов по k называется любая комбинация из k выбранных без учета порядка объектов. Ясно, что сочетаний будет меньше чем соответствующих размещений в $k!$ раз (из любого сочетания с помощью $k!$ перестановок можно получить все размещения). Таким образом, число сочетаний из n объектов по k равно $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Задачи.

1. Что вероятнее, то, что шестизначный номер автобусного билета содержит цифру 5, или что не содержит ее?

2. Какова вероятность того, что трехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе

а) состоит из одинаковых цифр;

б) состоит из разных цифр?

3. На шахматной доске стоят 2 ладьи. Какова вероятность того, что они не бьют друг друга? Решить ту же задачу для n ладей.

4. Из полной колоды в 36 карт вытягивают 2 карты. Найти вероятность того, что

а) все карты одного цвета;

б) все карты разных цветов?

Решить ту же задачу для 4 карт.

5. На диск замка сейфа нанесены 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?

6. В скольких различных состояниях может находиться Pentium с 32 Mb памяти?

7. Какова вероятность того, что две случайно взятые кости домино можно приложить друг к другу?

8. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Надя берет и яблоко, и апельсин. В каком случае Надя имеет бóльшую свободу выбора: если Ваня взял яблоко, или он взял апельсин?

9. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды в 36 карт по одной карте каждой масти так, чтобы карты красных мастей и карты черных мастей образовывали пары (например, 9 пик + 9 крестей и 6 бубен + 6 червей)?

10. Надо послать 6 срочных писем. Каждое из писем можно вручить одному из 3 курьеров. Сколькими способами это можно сделать? Какова вероятность того, что каждый курьер получит по крайней мере одно письмо?

11. Из полной колоды для игры в преферанс (32 карты) вытянули 10 карт. Какова вероятность того, что среди этих карт есть

а) хотя бы один туз;

б) ровно один туз;

в) не менее двух тузов;

г) ровно два туза?

12. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства, если наибольшее число зубов равно 32?

13. В купе имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом к локомотиву, трое — спиной, а остальным безразлично как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

14. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение пяти дней подряд она дает сыну по одному фрукту. Сколькими способами она может это сделать? Решите аналогичную задачу, если у мамы есть 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина.

15. Сколько различных слов можно составить из слова “математика” с помощью перестановок букв?

16. В урне 10 белых, 20 черных и 30 красных шаров. Наудачу вынимаются три шара. Какова вероятность, что все они будут

а) разного цвета;

б) одного цвета?

17. В соревнованиях по футболу участвуют 20 команд. Случайным образом они делятся на две группы по 10 команд. Какова вероятность того, что две наиболее сильные команды при этом окажутся в одной группе?

18. Генуэзская лотерея. Участники покупают билеты, на которых написано несколько чисел от 1 до 90. Стоимость одного билета не зависит от количества написанных на нем чисел. В день розыгрыша из мешка с жетонами, помеченными числами от 1 до 90, вынимают 5 жетонов. Выигрывают те билеты, на которых *все* написанные числа содержатся среди вытянутых жетонов. При этом осуществляются следующие выплаты по выигрышным билетам:

- с одним числом — 15 стоимостей билета;
- с двумя числами — 270 стоимостей билета;
- с тремя числами — 5500 стоимостей билета;
- с четырьмя числами — 75 000 стоимостей билета;
- с пятью числами — 1 000 000 стоимостей билета.

Рассчитайте доходность этой лотереи.

19. Найдите вероятности угадать 3, 4 и 5 номеров в лотерее “5 из 36”.

20. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать? А сколькими способами можно составить команду для участия в эстафете $100 + 200 + 400 + 800$ м?

21. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами можно это сделать?

22. Какова вероятность того, что четырехзначное число, которое может содержать только цифры 1, 2, 3, 4, 5 (может не раз), делится на 4?

23. Сочетания с повторениями. В кондитерском магазине продается 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

24. В детском конструкторе имеется три вида реек длиной 2, 6 и 10 сантиметров. Число реек каждого вида равно 5. Какова вероятность того, что из трех наудачу выбранных реек удастся составить а) равносторонний треугольник;

б) хоть какой-нибудь треугольник?

25. Сколько нужно вынуть карт из полной колоды в 36 карт, чтобы с вероятностью не меньшей $1/2$ можно было утверждать, что среди выбранных карт есть пики? Ответить на тот же вопрос для двух карт одной масти.

26. Из кармана, в котором было 2 монеты по 1 рублю, 5 монет по 50 копеек и 10 монет по 10 копеек достали наудачу 6 монет. Какова вероятность того, что этих денег хватит на оплату проезда в автобусе (1 рубль 50 копеек)?

27. Вы играете с Джоном и Чарли в следующую игру: каждый бросает кубик, на котором написаны числа 1, 2, 3, 1, 2, 3. Вы выигрываете, если ваша цифра не совпадает с цифрами Джона и Чарли. Каковы ваши шансы на выигрыш?

28. Какова вероятность того, что при раздаче карт в игре “Дурак” у вас на руках

а) не будет ни одного козыря;

б) все карты будут козырными;

в) будет половина козырных карт?

29. Из полной колоды в 36 карт вытянули наудачу 6 карт. Что вероятнее: иметь на руках ровно один бубновый туз, или ровно два какихнибудь других туза?

30. Дворцовый чеканщик из 12 монет сделал 4 фальшивых. Король подозревает чеканщика и решает проверить половину монет. При этом чеканщику предоставляется выбор: смерть за 1 или 3 фальшивые монеты и тюрьма за 2 фальшивые монеты или, наоборот, смерть за 2 фальшивые монеты и тюрьма за 1 или 3 фальшивые монеты. Что выбрать чеканщику?

31. Найти вероятность того, что в группе из n человек у кого-то совпадут дни рождения. Вывести формулу и подсчитать соответствующие вероятности при $n = 10, 20, 22, 23, 30, 50, 100$.

3 Свойства вероятности

В этом параграфе мы изучим свойства вероятности, определенной по классической схеме.

Во-первых, вероятность — это число, заключенное в пределах от 0 до 1, так как оно представимо в виде дроби, числитель которой неотрицателен и не больше знаменателя. Вероятность равна нулю, если событие является невозможным. Вероятность равна единице, если событие является достоверным. Этим мы доказали, что вероятность, определяемая по классической схеме, обладает свойством

A. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Теперь дадим некоторые определения, относящиеся к случайным событиям.

Определение. Назовем событие, происходящее тогда, когда событие A не происходит, *противоположным* событию A и обозначим его через $\overline{A}$. Ясно, что в случае, когда вероятность определяется по классической схеме, вероятность противоположного события дополняет вероятность исходного события до единицы и выполняется свойство

B. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Пример. Если событие

$$A = \{\text{на кубике выпало четное число очков}\},$$

то противоположным событием будет

$$\overline{A} = \{\text{выпала цифра 1, 3 или 5}\}.$$

Определение. Пусть A и B — два случайных события. Обозначим через $A \cup B$ событие, происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B, и назовем его *объединением событий.*

Ясно, что $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cup A = A$.

Определение. Пусть A и B — два случайных события. Обозначим через $A \cap B = A \cdot B = AB$ событие, происходящее тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B, и назовем его *пересечением событий.*

Ясно, что $A \cdot \overline{A} = \emptyset$, $A \cdot A = A$.

Пример. Если определить события

$$\begin{aligned} A &= \{\text{на верхней грани кубика 1 или 3}\}, \\ B &= \{\text{на кубике выпало 1 или 2}\}, \end{aligned}$$

то можно рассмотреть объединение и пересечение этих событий:

$$A \cup B = \{\text{выпало менее 4-х очков}\}$$
$$A \cdot B = \{\text{выпала единица}\}.$$

Нетрудно проверить (докажите!), что

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

С использованием классического определения вероятности, можно доказать, что для любых случайных событий A и B выполняется свойство

C. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$.

В самом деле, предположим, что событие A выполняется в m_A исходах случайного эксперимента, событие B — в m_B исходах, а событие AB — в m_{AB} исходах при общем числе n равновозможных исходов эксперимента. Подсчитаем, в скольких случаях выполнено событие $A \cup B$. По формуле включений и исключений, известной из теории множеств, получаем число $m_A + m_B - m_{AB}$. После деления этого результата на общее число исходов эксперимента n, можно воспользоваться определением вероятности и получить нужную формулу из свойства **C**.

Определение. Случайные события A и B называются *несовместными*, если событие $AB = \emptyset$.

Для несовместных событий формула, полученная выше, упрощается:

C′. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Кратко ее выражают словами: вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. Ясно, что с помощью рассуждений по индукции, можно доказать соответствующую формулу для вероятности суммы нескольких попарно несовместных событий.

Определение. Случайные события A и B называются *независимыми*, если $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Пусть имеются два случайных эксперимента с конечным числом исходов. Предположим, что результаты одного эксперимента *не влияют* на результаты другого (в нашем обычном понимании этого слова). Тогда действует комбинаторное правило произведения. Если первый эксперимент имеет n_1 равновозможных исходов, второй — n_2 равновозможных исходов, событие A происходит в m_1 исходах первого эксперимента, событие B — в m_2 исходах второго эксперимента, тогда общее число исходов “совместного” эксперимента равно n_1n_2, а благоприятных исходов для события AB будет, соответственно, m_1m_2. Так что

$$\mathbb{P}(AB) = \frac{m_1m_2}{n_1n_2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Во многих задачах по теории вероятностей независимость случайных событий либо специально оговаривается, либо предполагается, исходя из разумных соображений. Оказывается, что теоретико-вероятностное определение независимых событий хорошо соответствует нашим представлениям о независимости.

Теперь задумаемся над тем, что делать в том случае, когда случайный эксперимент имеет неравновозможные исходы или количество исходов бесконечно? В этом случае предлагается поступить следующим образом.

Определение. Будем называть *вероятностью* любую функцию, определенную на множестве всех возможных случайных событий, сопоставляющую каждому случайному событию A некоторое число $\mathbb{P}(A)$ и обладающую свойствами:

I. $\mathbb{P}(A) \geq 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

II. $\mathbb{P}(A \cup \ldots \cup B) = \mathbb{P}(A) + \ldots + \mathbb{P}(B)$, если события A, ... , B попарно несовместны.

Оказывается, что из этих двух *аксиом вероятности* вытекают все рассмотренные выше свойства вероятности, а также можно получить весьма далеко идущие следствия. В частности, можно доказать, что при повторении случайного эксперимента частота появления случайного события A будет приближаться к его вероятности. Таким образом, математическая модель, предлагаемая теорией вероятностей, очень хорошо описывает случайность реального мира.

Задачи.

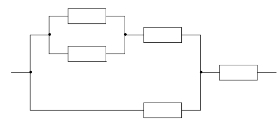
1. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека, каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что

а) все они выйдут на четвертом этаже;

б) все они выйдут на одном этаже;

в) все они выйдут на разных этажах.

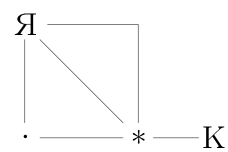
2. В электрической гирлянде 20 лампочек, соединенных последовательно. Вероятность того, что отдельно взятая лампочка перегорела, равна 0.01. Найти вероятность того, что гирлянда будет гореть, если ее включить в розетку.



3. Электрическая цепь собрана по схеме, указанной на рисунке. Вероятность того, что каждый элемент цепи исправен, равна p. Найдите вероятность того, что по цепи пойдет ток.

4. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Найдите вероятности выигрыша для каждого игрока.

5. Играют двое. Первый подбрасывает одну монету, а второй — две монеты. Выигрывает тот, у кого выпало больше гербов. В случае ничьей игра повторяется. Найдите вероятности выигрыша для каждого игрока.



6. В лабиринте, изображенном на рисунке, искатель клада в каждой развилке выбирает дорогу наугад. Если в процессе поиска он попадает в яму, то найти клад ему уже не суждено. Какова вероятность того, что искатель доберется до клада, если он начинает с места, указанного звездочкой? Рассмотрите два случая:

а) кладоискатель может возвращаться назад;

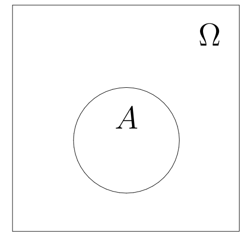
б) кладоискатель никогда не возвращается назад.

7. В дуэли участвуют Иван, Петр и Сидор. Стрельба ведется по очереди в указанном порядке. Каждый дуэлянт выбирает сам, как ему стрелять, а дуэль ведется до тех пор, пока в живых не останется один человек. Найдите вероятности остаться в живых для каждого дуэлянта, если Иван попадает в 50% случаев, Петр — в 70% случаев, а Сидор не промахивается никогда.

4 Геометрическая схема

Несмотря на то, что классическая схема вероятности может применяться чрезвычайно широко, все-таки есть случаи, когда она непригодна для корректного описания задачи. Рассмотрим следующий пример.

Перед грозой на асфальте был нарисован квадрат со стороной 1 метр, а в нем — кружок площадью 0.2 кв. м. Какова вероятность того, что первая капля дождя, упавшая в квадрат, попадет в кружок?



С идеальной точки зрения каплю можно считать точкой, случайно упавшей в квадрат, поэтому описанный выше случайный эксперимент может иметь бесконечное число исходов, которые в каком-то смысле можно считать равновозможными. Таким образом, классическая схема вероятности здесь неприменима. Как же быть в этом случае?

Разумно считать, что в описанной ситуации вероятность попадания в кружок (или в любую другую фигуру, нарисованную внутри квадрата) пропорциональна площади этого кружка (или фигуры, в общем случае), так что искомая вероятность будет равна 0.2.

Таким образом, вероятность случайного события A в данном случае можно определить по формуле

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{площадь множества благоприятных исходов}}{\text{площадь множества всевозможных исходов}}.$$

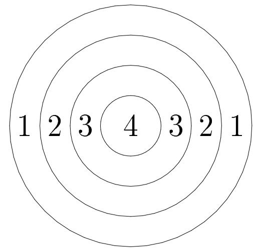
Оказывается, что при таком подходе все свойства вероятности, о которых говорилось в предыдущем параграфе, сохраняются (проверьте, что это на самом деле так!), а с интуитивной точки зрения это есть описание *равномерного распределения с бесконечным числом исходов.*

Кроме того, данное определение может обобщаться. Например, если геометрическая схема, иллюстрирующая задачу, является пространственной, то слово “площадь” следует заменить на слово “объем”, а если все удается изобразить на отрезке числовой оси, то естественной будет замена слова “площадь” на слово “длина”. В математике “длина”, “площадь”, “объем” являются частными случаями понятия “мера”, поэтому можно дать общее определение вероятности геометрического равномерного распределения следующим образом:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{мера множества благоприятных исходов}}{\text{мера множества всевозможных исходов}}.$$

Задачи.

1. Имеется мишень (см. рисунок). Вы закрыли глаза, произвели один выстрел и попали в эту мишень. Найдите вероятности выбить 1, 2, 3, 4 очка.



2. Вася и Петя тайком друг от друга записали на листочке бумаги по одному числу. Число Васи a заключено в пределах от -1 до 2, число Пети b — в пределах от -2 до 1. Какова вероятность того, что уравнение $ax = b$ имеет:

а) положительный корень;

б) не имеет корней?

3. Минное поле устроено так, что мины поставлены вдоль некоторой прямой с интервалами 100 метров. Корабль шириной 20 метров проходит к минному заграждению под углом α. Найдите вероятность подрыва корабля на мине.

4. Два числа x и y выбираются наудачу независимо друг от друга так, что $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 1$. Какова вероятность того, что $|x| < |y|$?

5. Палку случайным образом разломали на два куска. Найдите вероятность того, что длинный кусок не более чем в 2 раза длиннее короткого.

6. Два товарища договорились о встрече в определенном месте между 11 и 12 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 10 минут, после чего уходит. Найдите вероятность встречи, если каждый придет в случайный момент между 11 и 12 часами независимо от другого.

7. Длины катетов прямоугольного треугольника являются наудачу выбранными (независимо друг от друга) числами от 0 до 1. Какова вероятность того, что длина гипотенузы этого треугольника меньше 1?

8. Вася записался в математический и физический кружки. В каждый кружок надо ехать на определенном автобусе. Вася решил поступить так: приходить на остановку в случайный момент времени и садиться в первый попавшийся автобус, который везет его в один из кружков. Известно, что автобусы на обоих маршрутах ходят с пятнадцатиминутными интервалами. Через год оказалось, что в математический кружок Вася ходил вдвое чаще, чем в физический. Каким должно быть расписание движения автобусов, чтобы такое могло случиться?

9. Задача Бюффона.[1] Плоскость разграфлена параллельными линиями, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длины $2l$, $l < a$. Найдите вероятность того, игла пересечет какую-нибудь прямую.

5 Схема Бернулли и закон больших чисел

Предположим, что мы проводим n независимых экспериментов, каждый из которых имеет ровно два исхода. Назовем один из них успехом (У), а другой — неуспехом (Н). Пусть вероятность успешного окончания эксперимента равна p, а неуспешного — q. Ясно, что в этом случае обязательно $p + q = 1$. Такую математическую модель называют *схемой Бернулли* по имени математика, подробно рассмотревшего ее.

Главной формулой в схеме Бернулли является формула Бернулли, согласно которой вероятность того, что в n независимых экспериментах будет ровно k успешных, может быть вычислена так:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Как можно понять, почему формула имеет именно такой вид? В самом деле, существует ровно C_n^k способов произвести последовательность из n экспериментов так, чтобы ровно k из них оказались успешными, а вероятность того, что реализуется один из этих способов, равна $p^k q^{n-k}$ (здесь используется независимость экспериментов и правило умножения вероятностей независимых событий).

Стоит отметить, что при больших n и k вычисления, производимые по формуле Бернулли, становятся весьма трудоемкими, поэтому иногда применяют приближенные формулы Муавра-Лапласа и Пуассона. Доказательство этих формул сложно и выходит за рамки этой книги.

Задачи.

1. Монета подброшена 50 раз. Какова вероятность, что герб выпадет ровно в половине случаев? Попробуйте проверить свою интуицию,

[1] Для решения этой задачи необходимо иметь понятие об определенном интеграле и его геометрическом смысле — площади фигуры, заключенной между графиком функции и осью Ox.

запишите вашу оценку для этого числа, а потом примените формулу Бернулли.

2. За три дня до конца месяца Иван Невезучий потерял проездной билет и решил оставшиеся до конца месяца дни ездить на работу зайцем. Иван делает в день две поездки, а по его наблюдениям контролер встречается примерно каждую пятую поездку. Какова вероятность того, что Ивану повезет, и его ни разу не оштрафуют? Найдите также вероятности того, что Иван заплатит штраф один раз, и не менее двух раз.

3. В жюри, состоящем из нечетного числа членов, каждый независимо от остальных принимает правильное решение с вероятностью 0.7. Каково минимальное число членов жюри, при котором общее решение, выносимое большинством голосов, будет верным с вероятностью не меньшей 0.9?

4. В тираже лотереи "5 из 36" приняли участие около 1,5 млн. человек. Найдите приближенное значение вероятности того, что количество угадавших все 5 номеров будет от 2 до 5 человек.

5. Проблема Джона Смита (1693). Одинаковы ли шансы на успех у трех человек, если первому нужно получить хотя бы одну шестерку в шести бросаниях игральной кости, второму — хотя бы две шестерки в двенадцати бросаниях, а третьему — хотя бы три шестерки при восемнадцати бросаниях?

Основным результатом, который будет доказан в этом параграфе, является *закон больших чисел* для схемы Бернулли. Важность этого закона состоит в том, что он, будучи выведен из аксиом вероятности, дает математическое подтверждение тому факту, что предложенная система аксиом вероятности хорошо описывает реальные явления случайного характера. Мы будем доказывать закон больших чисел в несколько этапов, и, в конце концов, дадим ему точную формулировку.

Пусть мы производим случайные эксперименты, описываемые схемой Бернулли, и следим за числом $k(n)$ успешных экспериментов. Для произвольного числа $a > 0$ будем оценивать вероятность $\mathbb{P}\left\{\left|\frac{k(n)}{n} - p\right| > a\right\}$, то есть вероятность уклонения относительной частоты появления случайного события от вероятности, приписанной этому событию.

1. Если взять какие-нибудь конкретные значения n, p и q и выписать ряд вероятностей $P_n(0)$, $P_n(1)$, ... , $P_n(n-1)$, $P_n(n)$, то окажется, что сначала эти вероятности возрастают, а потом начинают убывать. Для определения того момента, когда это происходит, вычислим отношение $P_n(k+1)/P_n(k)$:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Теперь можно выяснить, когда это отношение больше единицы (вероятности растут), а когда меньше (вероятности убывают). Решая неравенство

$$\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} < 1,$$

получаем соотношение $k > np - q$, так что при указанных k вероятность $P_n(k+1)$ меньше, чем $P_n(k)$.

2. Займемся оценкой вероятности $\mathbb{P}\left\{\frac{k(n)}{n} - p > a\right\}$. Эта вероятность равна сумме всех тех $P_n(k)$, для которых $k > np + na$. Обозначим первое такое k, что $k > np + na$, через k^*. В описанной выше сумме вероятностей при $k \geq k^*$ каждое следующее слагаемое больше предыдущего слагаемого в $\dfrac{n-k}{k+1} \cdot \dfrac{p}{q}$ раз. Далее, из неравенств

$$n - k \leq n - np - na = nq - na,$$

$$k + 1 > k > np + na > np,$$

вытекает, что каждое следующее слагаемое больше предыдущего, как минимум, в $\dfrac{nq - na}{np} \cdot \dfrac{p}{q} = \dfrac{q-a}{q}$ раз. Это означает, что вся сумма оценивается так:

$$P_n(k^*) \cdot \left[1 + \frac{q-a}{q} + \left(\frac{q-a}{q}\right)^2 + \ldots\right] \leq$$

$$\leq P_n(k^*) \cdot \frac{1}{1 - \frac{q-a}{q}} \leq P_n(k^*) \cdot \frac{q}{a}.$$

Теперь заметим, что

$$P_n(np) + P_n(np+1) + \ldots + P_n(k^*) < 1,$$

потому что сумма *всех* возможных вероятностей (когда аргументы, стоящие в скобках, побегают все целые числа от 0 до n) в точности равна единице, а мы суммируем *не все* слагаемые, а только часть из них (каждое, конечно, положительно). Таких слагаемых в сумме не более чем na штук, самое большое из них — первое (см. пункт 1), поэтому $P_n(k^*) < \dfrac{1}{na}$. Окончательно получаем, что

$$\mathbb{P}\left\{\frac{k(n)}{n} - p > a\right\} < \frac{q}{na^2}.$$

3. Аналогичными вычислениями (проведите их!) показывается, что

$$\mathbb{P}\left\{\frac{k(n)}{n} - p < -a\right\} < \frac{p}{na^2},$$

и мы в силах записать окончательный ответ:

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{k(n)}{n} - p\right| > a\right\} < \frac{1}{na^2}.$$

Теперь прокомментируем полученный результат. Последняя формула означает следующее:

Закон больших чисел для схемы Бернулли. Вероятность того, что частота появления события в n независимых испытаниях будет отличаться от вероятности события p больше, чем на заданное положительное число a, стремится к нулю при неограниченном увеличении n каково бы ни было $a > 0$.

Закон больших чисел может быть применен ко многим задачам, где встречается повторение некоторого случайного эксперимента. Например, можно оценить сколько раз нужно бросить иглу в задаче Бюффона, чтобы получить значение π с заданными точностью и надежностью. Возьмем в обозначениях задачи Бюффона (см. последнюю задачу предыдущего параграфа) $2l = a$, тогда вероятность, которую требуется вычислить в задаче Бюффона, равна $1/\pi$. Если мы захотим, например, чтобы отклонение дроби $k(n)/n$ от $1/\pi$ было около 10^{-4} (тогда и приближение числа π, которое отсюда можно найти, будет иметь примерно такой же порядок ошибки) с вероятностью 0.9, мы должны положить (в обозначениях закона больших чисел) $a = 10^{-4}$. Закон больших чисел гарантирует, что если взять $n = 10^9$, то

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{k(n)}{n} - \frac{1}{\pi}\right| > 10^{-4}\right\} < \frac{1}{10^9 \cdot (10^{-4})^2} = 0.1.$$

Таким образом, вероятность превышения уровня допустимой ошибки будет достаточно мала лишь при огромных значениях n. Это очень грубая оценка, на самом деле можно обойтись гораздо меньшими значениями n, однако доказательство этого факта уже довольно сложное и здесь, по понятным причинам, не приводится.

6 Условная вероятность

Рассмотрим следующую задачу.

В шкафу стоят 10 одинаковых на внешний вид банок с вареньем. В шести из них находится сливовое варенье, а в оставшихся четырех — варенье из смородины. Вы наудачу вынимаете из шкафа две банки с вареньем. Какова вероятность того, что

а) вторая банка будет с вареньем из смородины;

б) вторая банка будет с вареньем из смородины, если первая оказалась со сливовым вареньем?

Решим эту задачу с использованием классического определения вероятности.

В первом случае имеется $10 \cdot 9 = 90$ способов вынуть из шкафа две банки с учетом порядка. Благоприятные способы разбиваются на две группы: либо обе банки содержат варенье из смородины ($4 \cdot 3 = 12$ способов), либо первая банка содержит сливовое варенье, а вторая — варенье из смородины ($6 \cdot 4 = 24$ способа). Вероятность, которую требуется подсчитать в пункте а) задачи, равна $(12 + 24)/90 = 2/5$.

Во втором случае известно, что первая банка, вынутая из шкафа, оказалась со сливовым вареньем, следовательно, перед вытягиванием второй банки в шкафу осталось девять банок с вареньем, из которых четыре банки со смородиновым вареньем. Так что ответом на второй вопрос задачи будет $4/9$.

Из решения задачи видно, что полученные ответы отличаются друг от друга. Это позволяет сделать вывод о том, что знание *дополнительной информации* может *изменять вероятности событий.* Для описания подобных ситуаций используется понятие условной вероятности.

Пусть производится случайный эксперимент, в котором наблюдаются два события A и B.

Определение. Предположим, стало известно, что в результате эксперимента произошло событие B. Вероятность того, что тогда произошло и событие A называется *условной вероятностью* события A при условии B и обозначается $\mathbb{P}(A|B)$.

Выведем формулу для определения условной вероятности для классической схемы вероятности.

Пусть случайный эксперимент имеет n равновозможных исходов, событие B происходит в m исходах, событие AB — в k исходах. Если стало известно, что произошло событие B, то мы знаем, что первоначальная неопределенность из n исходов уменьшилась до m исходов, которые, попрежнему, остаются равновозможными. Благоприятными исходами для события A теперь будут те k исходов, когда происходит событие AB. Искомая условная вероятность, таким образом, равна

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Из полученной формулы видно, что событие, стоящее в условии, должно иметь ненулевую вероятность.

Мы получили формулу для условной вероятности, опираясь на классическую схему. В теории вероятностей, где используется аксиоматический подход и считается, что вероятность уже как-то задана (необязательно по классической схеме), за определение условной вероятности принимают как раз выведенное нами соотношение.

Задачи.

1. Пусть в семье трое детей, причем вероятность рождения мальчика и девочки одинаковы. Докажите, что если спрашивать у мальчиков из таких семей, кого у них в семье больше — братьев или сестер, они будут чаще отвечать, что братьев, а если тот же вопрос задавать девочкам, то они чаще будут говорить, что сестер.

2. В одном маленьком городке полиция разыскивает бродягу. Можно считать, что есть четыре шанса из пяти, что он находится в одном из восьми баров городка, безразлично в каком — он не отдает предпочтения ни одному из них. Двое полицейских посетили семь баров, но бродягу не обнаружили. Каковы шансы найти его в восьмом баре?

3. В городе N дождливыми бывают четверть всех дней. Кроме того, замечено, что если в какой-то день дождь шел, то в двух случаях из трех он будет идти и на следующий день. Чему равна вероятность того, что завтра будет хорошая погода, если сегодня дождя не было?

7 Формулы полной вероятности и Байеса

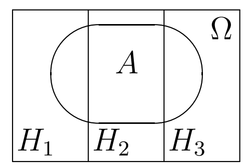
Пусть в результате случайного эксперимента может произойти событие A и всегда происходит одно и только одно из событий H_1, H_2, ... , H_n. Тогда, зная вероятности событий $\mathbb{P}(H_1)$, ... , $\mathbb{P}(H_n)$ и условные вероятности $\mathbb{P}(A|H_1)$, ... , $\mathbb{P}(A|H_n)$, можно вычислить вероятность события A следующим образом (см. также рисунок):

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AH_1) + \mathbb{P}(AH_2) + \ldots + \mathbb{P}(AH_n) =$$

$$= \mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2) \cdot \mathbb{P}(A|H_2) + \ldots + \mathbb{P}(H_n) \cdot \mathbb{P}(A|H_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i).$$

Эта формула носит название *формулы полной вероятности* (ФПВ), а события H_i, $1 \leq i \leq n$, называют *гипотезами*.



ФПВ оказывает большую помощь при решении задач, где логично разобрать несколько достаточно простых взаимоисключающих ситуаций.

Задачи.

1. Из 5 винтовок 3 снайперские и 2 обычные. Вероятность попадания из снайперской винтовки равна 0.95, а из обычной — 0.7. Какова вероятность попадания из винтовки, которая выбрана наудачу из этих пяти?

2. По данным многолетних наблюдений вероятность дождя в летний день равна 0.2. Синоптик, дающий достоверный прогноз в 8 случаях из 10, заявляет, что завтра будет дождь с вероятностью 0.9. С какой вероятностью нужно ожидать дождь, владея такой информацией?

3. Однажды Иванушка-дурачок отправился счастье искать. Дошел он до развилки дорог и увидел камень с надписью: "Налево пойдешь — сам умрешь, направо пойдешь — сразу счастье найдешь, прямо пойдешь — если Кощея победишь, то добудешь свое счастье." Но не умел читать Иванушка-дурачок и выбрал дорогу наудачу. Какова вероятность, что он нашел свое счастье, если он может победить Кощея с вероятностью $2/3$?

4. Вовочка так подготовился к экзамену, что может без шпаргалки сдать его на 5 с вероятностью 0.2, на 4 с вероятностью 0.4, на 3 с вероятностью 0.3 и провалиться с вероятностью 0.1. А еще Вовочка написал шпаргалку, которая, по его мнению, повысит оценку на один балл.

Из своего прошлого опыта Вовочка знает, что в половине случаев он сможет воспользоваться шпаргалкой, в трех случаях из десяти он может попасться преподавателю и получить двойку, а в 2 случаях из десяти он, чтобы не попасться преподавателю, не будет пользоваться шпаргалкой. Вовочка хочет сдать экзамен как минимум на четверку. Стоит ли Вовочке идти на экзамен со шпаргалкой?

5. Подводная лодка выпускает по кораблю 3 торпеды, каждая из которых, независимо от остальных, попадает в корабль с вероятностью 0.2. Каждая попавшая в корабль торпеда с одинаковой вероятностью попадает в один из четырех отсеков, на которые разделена подводная часть корабля. Найти вероятность того, что корабль будет пущен ко дну, если для этого необходимо, что было поражено не менее двух отсеков.

6. На диктанте по русскому языку на задней парте сидели Знайкина и Лейкин. Лейкин был доволен тем, как написал диктант, но сомневался, стоит ли в одном месте ставить запятую. Тогда он спросил об этом у Знайкиной, помня, что та в трех случаях из четырех ставит запятые в сложных предложениях правильно. Однако Знайкина — вредная, и в одном случае из четырех обманывает Лейкина, подсказывая ответ, противоположный тому, который сама считает верным. Стоит ли Лейкину послушаться Знайкину или лучше поставить запятую наугад?

Решим еще одну задачу, связанную с условными вероятностями.

На столе лежало 10 монет, из которых одна была с двумя гербами. Ваш приятель выбрал монету наугад, подбросил ее три раз. При этом трижды выпал герб. Какова вероятность, что это была монета с двумя гербами?

Для решения задачи будем применять ФПВ. Введем гипотезы

$$H_1 = \{\text{выбрана монета с одним гербом}\},$$

$$H_2 = \{\text{выбрана монета с двумя гербами}\}$$

и событие

$$A = \{\text{три раза выпал герб}\}.$$

По условию задачи $\mathbb{P}(H_1) = 9/10$, $\mathbb{P}(H_2) = 1/10$. Если выбрана обычная монета, то вероятность трехкратного выпадения герба равна $1/8$, так что $\mathbb{P}(A|H_1) = 1/8$. Если выбрана монета с двумя гербами, то трехкратное выпадение герба — это достоверное событие, поэтому $\mathbb{P}(A|H_2) = 1$.

По ФПВ находим, что

$$\mathbb{P}(A) = 9/10 \cdot 1/8 + 1/10 \cdot 1 = 17/80.$$

Далее, ответом на вопрос задачи служит условная вероятность $\mathbb{P}(H_2|A)$, которую по определению условной вероятности можно найти следующим образом:

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(AH_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_2) \cdot \mathbb{P}(A|H_2)}{\mathbb{P}(A)} = \\ = \frac{1/10}{17/80} = \frac{8}{17}.$$

Прием, использованный при решении задачи позволяет сразу же записать общую формулу:

$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A|H_i)}{\mathbb{P}(A)},$$

которую называют *формулой Байеса*. Эта формула применяется для решения задач, где требуется определить вероятности некоторых событий (чаще всего гипотез) уже *после* того, как стали известны результаты проведения эксперимента.

Задачи.

7. Однажды днем Петров разыскивал Васечкина, который мог быть на пляже (один шанс из двух), теннисном корте (один шанс из четырех) или в кафе-мороженом (один шанс из четырех). Если Васечкин на пляже, который достаточно велик, у Петрова есть один шанс из двух его не найти, если Васечкин на теннисном корте, то — один шанс из трех его не заметить, а вот если Васечкин в кафе, то Петров найдет его обязательно. Петров обошел все три места, но Васечкина так и не встретил. Какова вероятность того, что Васечкин был на пляже?

8. В городе X автобус в сторону озера ходит в два раза чаще, чем в сторону реки, и в три раза чаще, чем в сторону болота. На реке рыба клюет с вероятностью 0.4, на озере — с вероятностью 0.3, а на болоте почему-то вообще не клюет. Рыбак, приехав в город X, сел на первый попавшийся автобус, приехал на место, закинул удочку три раза, и рыба клюнула один раз. Какова вероятность, что рыбак удил на озере?

9. В группе 3 студента подготовлены к экзамену отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно, и 1 — плохо. Отлично подготовленный студент знает все 20 вопросов, хорошо подготовленный — 16, посредственно — 10 и плохо — 5. Вызванный наудачу студент ответил на 2 из 3 поставленных вопросов. Найти вероятность того, что это был плохо подготовленный студент.

10. При некоторых условиях стрельбы стрелок A поражает мишень с вероятностью $3/5$, стрелок B — с вероятностью $1/2$, стрелок C — с вероятностью $2/5$. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал C в мишень или нет?

8 Задачи на вычисление вероятностей

В этом параграфе приводятся несколько задач, которые можно решить, используя приемы и методы, описанные в предыдущих параграфах.

Задачи.

1. На большой улице расположены два светофора, каждый из которых устроен так, что зеленый свет на нем горит $2/3$ всего времени работы светофора. Автомобилист заметил, что когда он проезжает на зеленый свет первый светофор, то в трех случаях из четырех и второй светофор его не задерживает. Однажды автомобилист проскочил первый светофор на красный свет. Какова вероятность, что и на втором светофоре будет гореть красный свет?

2. Для обслуживания рейса трансатлантического воздушного лайнера требуются три стюардессы, которых выбирают по жребию из 20 девушек. Семь из них — блондинки, остальные — брюнетки. Какова вероятность, что из трех выбранных стюардесс будет по крайней мере одна блондинка и по крайней мере одна брюнетка?

3. Правитель некой страны из чисто военных соображений хотел бы, чтобы среди его подданных было больше мужчин, чем женщин. Поэтому он повелел, чтобы ни в одной семье не было более одной девочки. В результате у каждой женщины этой страны среди детей последней — и только последней — была девочка, ибо ни одна женщина, родив девочку, не решалась больше иметь детей. Какую же долю составляли теперь представители мужского пола в этой стране?

4. Каждое воскресенье двое из супругов завтракают вместе со своими матерями. Как это бывает, отношения каждого из супругов с матерью своей “половины” весьма натянуты: оба знают, что при встрече с тещей или свекровью есть два шанса из трех вступить с ней в пререкания.

При возникновении конфликта другой супруг в половине случаев принимает сторону своей матери (и, значит, ссорится со своей “половиной”), столь же часто он (или она) защищает жену (или мужа) и ссорится с матерью.

Предположим, что пререкания каждого из супругов с тещей или свекровью независимы друг от друга. Какова же доля воскресений, когда дело обходится без ссор между супругами?

5. Иван Петрович едет на работу либо на своей машине (и тогда из-за пробок в пути опаздывает в половине случаев), либо на метро (и тогда опаздывает только один раз из четырех). Если в какой-то день Иван Петрович прибывает на работу вовремя, то и на следующий день он пользуется тем же транспортом, а если опаздывает, то обязательно меняет вид транспорта. Каковы шансы Ивана Петровича опоздать на работу, когда он поедет туда 467-й раз?

6. В первой команде 6 мастеров спорта и 4 перворазрядника, а во второй — 6 перворазрядников и 4 мастера спорта. Сборная, составленная произвольным образом из игроков первой и второй команд, содержит 10 человек: 6 человек из первой команды и 4 — из второй. Из сборной команды наудачу выбирается один спортсмен. Какова вероятность, что он является мастером спорта?

9 Случайные величины

В этом параграфе мы познакомимся еще с одним очень важным понятием теории вероятностей — понятием случайной величины.

Определение. Величина, принимающая свое значение в зависимости от исхода случайного эксперимента, называется *случайной величиной.*

Пример. Пусть производится тысячекратное подбрасывание монеты, а $X = \{\text{число выпавших гербов}\}$. Тогда X — случайная величина, которая может принимать все целые значения от 0 до 1000 включительно (хотя, например, вероятность того, что $X = 0$ исчезающе мала).

Пример. Пусть

$$Y = \{\text{температура на улице августовским утром}\}.$$

Если считать “случайным экспериментом” наступление августовского утра, то Y будет случайной величиной, ее значение зависит от “конкретного результата" случайного эксперимента.

Мы будем рассматривать только такие случайные величины, все возможные значения которых можно перечислить. Таблица вида

x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_1	p_2	$\dots$	p_n

будет называться *распределением случайной величины* X. Зная распределение случайной величины, мы можем сказать, что она принимает значения $x_1, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, \dots, p_n$. Иногда может случиться так, что случайная величина принимает бесконечное число значений. В этом случае распределение такой величины представляет собой бесконечную таблицу. Для любого исхода случайного эксперимента случайная величина должна иметь определенное значение, поэтому можно сказать, что вероятность того, что случайная величина примет хоть какое-то значение, равна единице. Таким образом, $\sum\limits_i p_i = 1$, где индекс i пробегает все возможные значения.

Случайные величины имеют несколько числовых характеристик. Например, некоторое описание случайной величины дает ее *среднее значение*, называемое еще *математическим ожиданием.*

Определение. *Математическим ожиданием* случайной величины X, имеющей распределение, приведенное выше, называется число $\mathbb{M}X = \sum\limits_i x_i p_i$.

Пример. Пусть

$$X = \{\text{число очков на верхней грани кубика}\}.$$

Тогда X — случайная величина, принимающая целые значения от 1 до 6 с вероятностями по $1/6$. В этом случае

$$\mathbb{M}X = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2},$$

то есть математическое ожидание представляет собой среднее арифметическое числа очков, которые могут выпасть на верхней грани игрального кубика. Это поясняет, почему используется термин "среднее значение". Стоит сразу же заметить, что математическое ожидание — это не обязательно самое вероятное значение случайной величины. В только что разобранном примере математическое ожидание равно 3.5, а такое число на кубике никогда не выпадает.

Задачи.

1. В вазе лежат 3 зеленых и 2 красных яблока. Яблоки выбираются наугад до тех пор, пока не попадется красное. Найдите распределение и среднее число вынутых яблок, если:

а) зеленые яблоки выбрасываются;

б) зеленые яблоки возвращаются обратно.

2. Юный баскетболист Коля производит броски мяча в кольцо, попадая с вероятностью 0.2. Найдите среднее число бросков до первого попадания в кольцо.

3. На пути движения машины 6 светофоров, каждый из которых, независимо от остальных, с вероятностью $1/3$ разрешает и с вероятностью $2/3$ запрещает дальнейшее движение. Найдите распределение и среднее число пройденных без остановки светофоров.

4. Три стрелка выстрелили по разу по мишени. Вероятности попадания для каждого из стрелков равны 0.8, 0.5 и 0.1. Найдите распределение и среднее число попаданий в мишень.

5. На вершине куба сидит муха, на противоположной вершине — паук. Муха ползает по ребрам куба, выбирая в каждой вершине куба ребро наудачу. Считая, что ребро проходится за единицу времени, найдите среднее время жизни мухи.

10 Парадоксы теории вероятностей

Теория вероятностей представляет собой область математики, необычайно богатую парадоксами — истинами, настолько противоречащими здравому смыслу, что поверить в них трудно даже после того, как правильность их подтверждена доказательством. В этом и следующем параграфах[2] мы уделим внимание именно таким примерам. Попробуйте сами разобраться в приведенных здесь парадоксах, а потом обязательно загляните в ответ, чтобы проверить себя!

[2] Бóльшая часть материала этого параграфа заимствована из книги Мартина Гарднера “Математические головоломки и развлечения”.

Парадокс дней рождения. Выберем наугад 24 человека. Какова, по вашему мнению, вероятность того, что двое или бóльшее число из них родились в один и тот же день одного и того же месяца (но, быть может в разные годы)? Интуитивно чувствуется, что вероятность такого события должна быть очень мала. На самом же деле она оказывается более 50%! Этот результат уже получен нами в задаче о днях рождения из §2.

Парадокс второго туза. Из колоды в 52 карты Вам дают 13 карт. Допустим, что у Вас есть туз. Пусть P — вероятность того, что у Вас есть второй туз. Теперь допустим, что, взяв карты, Вы увидели, что у Вас есть туз пик. Пусть Q — вероятность того, что у Вас есть второй туз. Докажите, что $P < 1/2 < Q$. Почему изменяется вероятность, если Вы заранее называете масть туза?

Парадокс второго ребенка похож на предыдущий. Предположим, мистер Смит сообщает, что у него двое детей и по крайней мере один из них мальчик. В этом случае вероятность, что и второй ребенок мистера Смита мальчик равна $1/3$. Если бы мистер Смит сказал, что у него старший ребенок — мальчик, то ответ в этой задаче будет другим, а именно $1/2$. Проверьте это!

Одной из возможных вариаций последнего парадокса является следующее рассуждение, "позволяющее угадывать" какой стороной упала монета с вероятностью, большей чем $1/2$: "Подбросим еще одну монету. Предположим что она упала вверх гербом. Мы знаем, что по крайней мере одна монета упала вверх гербом, поэтому вероятность того, что и вторая монета упала вверх гербом, равна $1/3$. Значит, называя слово "решка", мы угадаем исход бросания первой монеты с вероятностью $2/3$". Объясните этот парадокс.

Игра в совпадения. Тасуются две колоды, в каждой из которых по 52 карты. Затем выбираются по одной карте из каждой колоды до тех пор, пока вынимаемые в очередной раз карты не совпадут или не закончатся колоды. Насколько мала, по Вашему мнению, вероятность того, что совпадение все-таки произойдет?

Петербургский парадокс (как стать миллионером). Предположим, что имеется азартная игра с вероятностью выигрыша p. Сразу же отбросим случаи $p = 0$, когда выиграть в принципе невозможно, и $1/2 < p \leq 1$, так как в последнем случае с Вами в такую игру, скорее всего, никто не будет играть. Будем считать, что $0 < p \leq 1/2$.

Допустим, что правила игры позволяют Вам выбирать размер ставки игры по своему усмотрению: поставив на кон 1 рубль, Вы либо его проигрываете, либо возвращаете назад и получаете еще столько же.

Рассмотрим следующий алгоритм выбора ставки: "Поставим на кон 1 рубль. Если проигрываем, то удваиваем сумму, то есть ставим на кон 2 рубля и играем снова. Если проигрываем, то опять удваиваем ставку и т. д. Так как вероятность выигрыша ненулевая, то в какой-то момент времени мы выиграем, возвратив все свои деньги и получив дополнительно еще 1 рубль. Теперь можно все начинать заново со ставки в 1 рубль."

Проверим указанное выше рассуждение. Предположим, что ставку пришлось удвоить n раз, после чего нам повезло, и мы выиграли. При этом было затрачено

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \text{ рублей.}$$

Выиграв в последней игре, мы получаем $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ рублей. Таким образом, все, что сказано выше, является сущей правдой!

Этот парадокс впервые был изложен математиком Даниилом Бернулли в "Мемуаре", который он представил Санкт-Петербургской Академии Наук. Подробный анализ этого парадокса связан с исследованием бесконечных сумм и приводит ко всякого рода тонким вопросам обоснования теории вероятностей.

Вычислим средний капитал, который может понадобиться в такой игре. Пусть $q = 1 - p$, X — случайная величина, означающая затраты, которые мы понесли в очередной игре. Распределение X имеет вид

1	3	7	15	$\ldots$	$2^n - 1$	$\ldots$
p	q	q^2	q^3	$\ldots$	q^{n-1}	$\ldots$

Вычислим $\mathbb{M}X$:

$$\mathbb{M}X = p + 3q + 7q^2 + \ldots + (2^n - 1) \cdot q^{n-1} + \ldots = \infty,$$

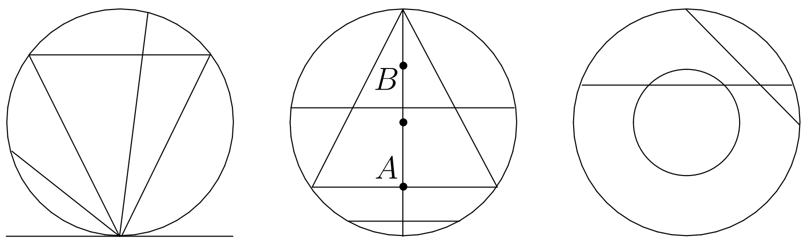
так как $q \geq 1/2$, а значит каждое слагаемое в этой бесконечной сумме больше единицы.

Парадокс Бертрана. Дана окружность. Какова вероятность того, что проведенная наудачу хорда будет длиннее стороны правильного треугольника, вписанного в эту окружность?

Рассмотрим три возможных решения этой задачи.

I. Хорда должна начинаться в некоторой точке окружности. Обозначим эту точку через A и проведем к окружности касательную в точке A

как это показано на рисунке а). Другим концом хорды может быть любая точка окружности, поэтому мы получаем бесконечно много равновероятных хорд. Ясно, что длиннее стороны вписанного треугольника могут быть только те хорды, которые попадают внутрь угла при вершине треугольника в точке A. Поскольку этот угол равен 60°, а хорды заполняют развернутый угол (180°), вероятность того, что случайно проведенная хорда будет длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника, равна $60/180$, или $1/3$.



а) A б) в)

II. Какую бы хорду мы ни провели, она всегда будет перпендикулярна одному из диаметров окружности. Будем считать, что проведенная нами хорда перпендикулярна вертикальному диаметру, и впишем в окружность равносторонний треугольник с вершиной, совпадающей с верхним концом вертикального диаметра (рисунок б). Точки пересечения таких хорд с диаметром равномерно распределены по всему этому диаметру. Нетрудно показать, что расстояние от центра окружности до точки A равно половине радиуса. Обозначим через B точку того же диаметра, лежащую на расстоянии половины радиуса по другую сторону от центра. Легко видеть, что длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника будут лишь те хорды, которые пересекают проведенный диаметр между точками A и B. Так как отрезок AB составляет половину диаметра, ответ задачи $1/2$.

III. Любую точку круга можно рассматривать как середину некоторой хорды. Из рисунка в) видно, что длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника могут быть лишь те хорды, середины которых лежат внутри маленького круга. Площадь этого круга составляет ровно $1/4$ площади всего круга. Отсюда следует, что и ответ задачи в данном случае оказывается равным $1/4$.

Естественно возникает вопрос: какой же из трех ответов правилен? Каждый ответ верен по-своему, каждый отвечает определенному способу проведения “случайных” хорд. Экспериментально соответствующие построения можно осуществить, например, с помощью следующих трех “методов”:

1. Взять два веретена и, закрутив каждое из них в любую сторону независимо от другого, по очереди поставить их в центр круга. Отметить конечные точки траекторий, описанных остриями веретен, и соединить отмеченные точки прямой. С вероятностью $1/3$ отрезок этой прямой, заключенный внутри круга, будет больше стороны вписанного равностороннего треугольника.

2. Нарисовать мелом на асфальте большой круг и с расстояния около 5 метров вкатывать в него палку от метлы. Остановившись где-то внутри круга, палка наметит направление некоторой хорды. С вероятностью $1/2$ эта хорда длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника.

3. Намазать круг медом и подождать, пока на него не сядет муха. Провести хорду, середина которой совпадает с точкой, где сидит муха. С вероятностью $1/4$ эта хорда будет длиннее стороны правильного равностороннего треугольника.

Каждый из предложенных способов построения “случайных” хорд вполне законен, поэтому наша задача в ее первоначальной формулировке допускает различные толкования. Однозначное решение становится возможным лишь после того, как мы уточним, в каком именно смысле следует понимать выражение “провести случайным образом хорду”, дав точное описание метода ее построения.

Самое интересное, что большинство людей, если попросить их провести наугад хорду в окружности, изберут для этого способ, не имеющий ничего общего ни с одним из трех перечисленных выше способов. С вероятностью, много большей чем $1/2$, человек проводит хорду, превышающую по длине сторону вписанного равностороннего треугольника.

Парадокс тюремного надзирателя. Три узника A, B и C, приговоренные к смертной казни, сидели в одиночных камерах. Губернатор решил помиловать одного из них. Записав имена заключенных на трех листочках бумаги, он бросил листочки в шляпу и тщательно перемешал их. Затем он вытащил один листочек, прочитал значившееся там имя и сообщил по телефону свое решение тюремному надзирателю, потребовав от того, чтобы имя счастливчика в течение еще нескольких дней хранилось в тайне. Слух о помиловании дошел до заключенного A. Во время утреннего обхода A попытался выведать у надзирателя, кто же помилован, но тот отказался отвечать на подобные вопросы.

— Тогда назовите, — попросил A, — имя одного из заключенных, которые будут казнены. Если помилован B, назовите мне имя C, если помилован C, назовите мне имя B. Если помиловали меня, то бросьте монетку, чтобы решить, кого назвать — B или C.

— Но если вы увидите, что я бросаю монетку, — ответил осторожный надзиратель, — то сразу узнаете, что помиловали именно вас, а увидев, что я не бросаю монетку, вы догадаетесь, что помиловали либо вас, либо того, чье имя я не назову.

— Хорошо, — сказал A, — можете ничего не говорить мне сейчас, ответьте на мой вопрос завтра.

Надзиратель, ничего не знавший о теории вероятностей, провел в размышлениях всю ночь и решил, что даже если он и примет предложение A, то это ничем не поможет A оценить свои шансы остаться в живых. Поэтому на следующее утро надзиратель сообщил, что казни подлежит заключенный B.

Когда надзиратель ушел, A про себя посмеялся над глупостью тюремщика: ведь теперь то, что у математиков принято называть "пространством элементарных событий", состояло лишь из двух равновероятных элементов: губернатор мог помиловать либо C, либо самого A. Следовательно, по всем правилам вычисления условной вероятности шансы A остаться в живых возросли с $1/3$ до $1/2$.

Надзиратель не знал, что A мог перестукиваться с находившемся в соседней камере заключенным C по водопроводной трубе. Узник A не замедлил сообщить о случившемся своему соседу, подробно передав все, о чем он спросил у надзирателя и что тот ему ответил. Заключенный C также обрадовался новости, потому что, рассуждая так же, как A, он подсчитал, что и его шансы остаться в живых возросли до $1/2$.

Правильно ли рассуждали оба узника? Если же нет, то как должен был вычислять свои шансы на помилование каждый из них?

Парадокс Хемпеля был открыт в 1937 г. профессором философии Принстонского университета Карлом Хемпелем и поныне служит предметом высокоученых споров между специалистами по философии науки, так как он затрагивает самую сущность научного метода.

Предположим, что некий ученый хочет исследовать гипотезу "все вороны черные". Его исследование состоит в изучении как можно большего числа ворон. Чем больше он найдет черных ворон, тем более вероятной становится его гипотеза. Таким образом, каждая черная ворона может рассматриваться как пример, подтверждающий гипотезу. Большинство ученых считает, что они отчетливо представляют себе, что такое подтверждающий пример. Парадокс Хемпеля мгновенно рассеивает их иллюзии, так как с помощью железной логики мы можем доказать, что красная корова тоже является подтверждающим примером гипотезы "все вороны черные"! Вот как это делается.

Утверждение "все вороны черные" можно преобразовать в логически эквивалентное ему утверждение "все нечерные предметы — не вороны" способом, который в логике принято называть "прямым доказательством через обращение". Второе утверждение по смыслу тождественно первому; оно просто иначе сформулировано. Очевидно, что существование любого объекта, подтверждающего второе утверждение, должно также подтверждать и первое.

Предположим, что ученый ищет нечерные предметы для подтверждения гипотезы о том, что все такие предметы не являются воронами. Он сталкивается с каким-то красным предметом. Более близкое знакомство показывает, что это не ворона, а корова. Красная корова, безусловно, является подтверждающим примером положения "все нечерные предметы — не вороны" и поэтому увеличивает вероятность того, что логически эквивалентная гипотеза "все вороны черные" справедлива. Подобная аргументация, безусловно, применима и к белому слону, и к зеленому галстуку самого ученого. Как выразился один философ, орнитолог, изучающий цвет ворон, мог бы продолжить свои исследования и в дождливый день, даже не замочив при этом ног. Для этого ему достаточно оглядеться в собственной комнате и отметить примеры всех нечерных предметов, не являющихся воронами!

Как и в предыдущих примерах парадоксов, трудность здесь, по всей видимости, кроется не в ошибочном рассуждении, а в том, что Хемпель называет "заблуждением интуиции".

Все сказанное приобретает еще бо́льший смысл, если рассмотреть пример попроще. В фирме работает много машинисток, у некоторых из них рыжие волосы. Мы хотим проверить гипотезу о том, что все рыжие машинистки замужем. Проще всего подойти к каждой рыжей машинистке и спросить, есть ли у нее муж. Но есть и другой способ, может быть даже более эффективный. Мы берем в отделе кадров список всех незамужних машинисток, затем подходим к девушкам из этого списка, чтобы увидеть, какого цвета у них волосы. Если ни одна из них не будет рыжей, то гипотеза полностью подтверждена. Никто не станет возражать против того, что каждая незамужняя машинистка, цвет волос которой отличается от рыжего, будет подтверждающим примером теории о том, что все служащие в данной фирме рыжие машинистки замужем.

Согласившись с предложенной выше программой обследования нечерных предметов, не являющихся в то же время воронами, или цвета волос машинисток, мы столкнемся с небольшим затруднением: малым числом обследуемых объектов. Если же мы попытаемся установить, все ли вороны черные, то обнаружится огромная диспропорция между числом всех ворон на земле и числом нечерных предметов. Каждый согласится, что проверка всех нечерных предметов представляет собой весьма неэффективный способ исследования. Наш вопрос несколько тоньше: есть ли рациональное зерно в утверждении о том, что обнаружение красной коровы в том или ином смысле может служить примером, подтверждающим выдвинутую гипотезу? Становится ли наша первоначальная гипотеза хоть немного более правдоподобной при обнаружении подтверждающего примера, по крайней мере, если речь идет о конечных множествах (рассмотрение бесконечных множеств завело бы нас слишком далеко)? Одни логики считают, что подтверждающий пример увеличивает правдоподобие гипотезы, другие в этом сомневаются. Они замечают, например, что красную корову можно с таким же успехом считать подтверждающим примером для гипотезы "все вороны белые". Каким образом обнаружение отдельного объекта может изменить правдоподобие одной из двух взаимоисключающих гипотез?

Некоторые пытаются отделаться от парадокса Хемпеля смущенной улыбкой и недоуменным пожиманием плечами. Не следует забывать, однако, что многие логические парадоксы, которые долгое время считались пустыми забавами, безделушками, сыграли чрезвычайно важную роль в развитии современной логики. Точно так же анализ парадокса Хемпеля уже позволил глубоко проникнуть в существо некоторых сложных проблем индуктивной логики, основного средства получения всех научных результатов.

11 Индукция и вероятность

Представьте себе[3], что мы живем на ковре с необычайно сложным узором. Ковер может быть конечным, а может неограниченно простирать-

[3]Материал этого параграфа заимствован из книги М. Гарднера "Путешествие во времени".

ся во все стороны. Одни фрагменты узора кажутся случайными, как абстрактная экспрессионистская живопись, другие — строго геометрические. Часть ковра может производить впечатление иррегулярной, но при рассмотрении ее в более широком обрамлении она оказывается фрагментом узора, обладающего тонкой симметрией.

Задача описания узора затрудняется тем, что ковер покрыт толстым слоем пластика, прозрачность которого меняется от места к месту. В одних местах пластик совершенно прозрачен, и мы отчетливо различаем сквозь него узор; в других лишен прозрачности. Кроме того, лист пластика имеет переменную твердость. Где-то пластик можно соскоблить, от чего узор становится виднее, где-то он упорно сопротивляется всем попыткам сделать его более прозрачным. Свет, проходя сквозь лист пластика, преломляется самым причудливым образом, поэтому чем больше мы уменьшаем толщину пластика, тем сильнее трансформируется первоначальный узор. Повсюду — причудливая смесь порядка и беспорядка. Едва заметные решетки с изящными симметриями покрывают весь ковер, но как далеко простирается каждая из них, нам остается лишь догадываться. Неизвестно, сколь велика толщина пластика. Нам нигде не удается соскоблить его полностью и достичь поверхности ковра, если таковая существует.

Наша метафора завела нас слишком далеко по одной причине: узоры реального мира в отличие от узоров воображаемого ковра непрестанно меняются (ковер как бы скатывается с одного конца и развертывается с другого). Тем не менее в общих чертах сравнение с ковром позволяет продемонстрировать некоторые трудности, с которыми сталкиваются при попытке понять эффективность естественных наук те, кто занимается философией науки.

Индукция — это процедура, с помощью которой "ковроведы", изучая отдельные части ковра пытаются догадаться как выглядят еще не обследованные его участки. Предположим, что ковер покрыт миллиардами крохотных треугольников. Всякий раз, когда встречается синий треугольник, у него в одном из углов оказывается красное пятнышко. Просмотрев тысячи синих треугольников и убедившись, что они все до единого помечены красным пятнышком, "ковроведы" высказывают гипотезу, согласно которой красное пятнышко есть у всех синих треугольников. Каждый вновь наблюдаемый синий треугольник с красным пятнышком подтверждает замеченную ими закономерность. В отсутствие контрпримеров убеждение "ковроведов" в правильности открытой ими закономерности растет по мере того, как увеличивается число подтверждающих примеров.

Переход от “некоторых” синих треугольников ко “всем” синим треугольникам, разумеется, является нарушением логики. Работая в рамках дедуктивной системы, невозможно быть полностью уверенным в том, как выглядит еще не обследованная часть ковра. С другой стороны, индуктивные умозаключения позволяют получать правильные выводы, и философы по-разному пытаются обосновать индукцию. Джон С. Милль обосновывает индукцию ссылкой на регулярность узоров ковра. Он сознает, что в его логических рассуждениях содержится порочный круг, так как заключение “ковроведов” о том, что ковер покрыт узором, сделано на основании неполной индукции. Однако Милль не считает этот круг порочным, и многие современные философы придерживаются такого же мнения. Бертран Рассел в своем последнем большом труде пытался заменить расплывчатый тезис Милля об однородности природы чем-то более точным. Он сформулировал 5 постулатов о структуре мира, достаточных, по его мнению, для обоснования индукции.

Ганс Рейхенбах предложил наиболее известное из нескольких прагматичных обоснований. По мнению Рейхенбаха, если и существует какой-то способ догадываться о том, как выглядят недоступные наблюдению части ковра, то это индукция. Если отказывает индукция, то отказывает и все остальное, поэтому естественные науки должны использовать единственное средство познания окружающего мира, которым они располагают. “Такой ответ не содержит в себе логического противоречия, — пишет Рассел, — но не могу сказать, что он казался мне весьма удовлетворительным”.

Такого же мнения придерживается и Рудольф Карнап. Он считает, что все способы обоснования индукции логически корректны, но тривиальны. Если под “обоснованием” понимать то, как мы “обосновываем” математическую теорему, то прав Давид Юм: никакого обоснования не существует. Если же “обоснование” понимать в более слабом смысле, причем не в одном, а в нескольких вариантах, то, разумеется, обоснование (неполной) индукции можно отстаивать. Более интересная задача, подчеркивает Карнап, состоит в том, чтобы выяснить, возможно ли построить индуктивную логику.

Построение индуктивной логики было надеждой и мечтой Карнапа. Он предвидел такое развитие науки в будущем, при котором ученый, работающий в области естественных наук сможет излагать гипотезу вместе со всеми имеющимися у него экспериментальными и наблюдательными данными на формализованном языке. Затем, используя индуктивную логику, исследователь сможет сопоставить своей гипотезе некоторую вероятность, называемую степенью подтверждения. Значение этой вероятности не может быть окончательным или заданным раз и навсегда: оно может увеличиваться, уменьшаться или оставаться неизменным по мере накопления новых данных. Карнап считает, что представители естественных наук уже мыслят в терминах индуктивной логики, но в терминах расплывчатых, не формулируя их явно. Однако по мере усовершенствования средств научного исследования значение степени подтверждения становится известным со все большей точностью. Возможно, что в конце концов нам удастся создать своего рода индуктивный анализ, который будет иметь практическое значение, облегчая нескончаемый поиск законов природы.

В своем труде “Логические основания теории вероятностей” и в последующих работах Карнап пытался заложить основы индуктивной логики. Насколько ему удалось осуществить свой замысел, вопрос спорный. Некоторые философы разделяют взгляды Карнапа и продолжают развивать избранный им подход. Другие рассматривают весь проект как основанный на недоразумении.

Один из почитателей Карнапа К. Хемпель разумно заметил, что прежде чем мы попытаемся приписать подтверждениям какие-нибудь количественные величины, нам необходимо на качественном уровне понять, что именно следует понимать под “подтверждающим наблюдением”. Именно здесь, при попытке придать точный смысл этому выражению, мы сталкиваемся с наиболее серьезными трудностями.

Рассмотрим знаменитый парадокс Хемпеля о воронах.

Мы попытаемся пояснить суть этого парадокса с помощью 100 игральных карт. На рубашке (оборотной стороне) некоторых из них нарисована ворона. Гипотеза, которая подлежит проверке, состоит в утверждении: “Все карты, на которых нарисованы воро́ны, черной масти”. Вы перетасовываете всю колоду и раскладываете карты вверх картинкой (лицевой стороной). После того, как вы выложите 50 карт и не обнаружите ни одного контрпримера, гипотеза, очевидно, станет для вас более правдоподобной. По мере того, как все больше карт с воронами на рубашке будет выложено вверх картинкой и окажутся черной масти, степень подтверждения будет стремиться к 1 (достоверности) и, наконец, может стать равной 1.

Сформулируем ту же гипотезу иначе: “Все карты, нечерной масти — не вороны (то есть на их рубашке не изображена ворона)”. Это утверждение логически эквивалентно исходному. Если вы проверите истинность нового утверждения на другой перетасованной колоде из 100 карт, держа их вверх картинкой и переворачивая поочередно, то всякий раз, выкладывая на стол карту нечерной масти и не обнаружив на рубашке нарисованную ворону, вы тем самым подтверждаете свою гипотезу о том, что все карты нечерной масти “не вороны”. Так как ваша гипотеза логически эквивалентна гипотезе “Все карты черной масти — вороны”, то вы подтверждаете и эту, эквивалентную, гипотезу. Выложив на стол все карты и не обнаружив ни одной карты красной масти с вороной на рубашке вы полностью подтвердите гипотезу о том, что все карты с вороной на рубашке черной масти.

К сожалению, изложенная выше процедура не применима к реальному миру, где она просто “не работает”. Утверждение “Все вороны черные” логически эквивалентно утверждению “Все нечерные предметы — не вороны”. Мы оглядываемся вокруг и замечаем какой-то желтый предмет. Ворона ли это? Нет, это масленка. Цветок заведомо подтверждает, хотя и слабо, что все нечерные предметы не вороны, однако трудно понять, какое отношение и масленка, и цветок имеют к утверждению “Все вороны черные” . Если все это имеет отношение, то одновременно подтверждается, что все вороны белые или любого другого цвета, кроме желтого. Ситуация еще более усугубляется тем, что утверждение “Все вороны черные” логически эквивалентно утверждению “Любой предмет либо черный, либо не ворона”. И это подтверждается любым черный предметом (будь то ворона или не ворона) или любой не вороной (как черной, так и не черной). И то, и другое представляется абсурдным.

Не меньшей известностью пользуется парадокс Нелсона Гудмана о “зелубом” цвете. Предмет считается “зелубым”, если он имеет зеленый цвет, например, до 1 января 2100 года, а затем становится голубым. Подтверждается ли закономерность “Все изумруды зелубые” наблюдением зеленых изумрудов? Некий пророк предвещает, что конец света наступает 1 января 2100 года. Казалось бы, каждый день существования мира подтверждает предсказания пророка, однако никто не считает, что от этого оно становится более вероятным.

Ситуация еще более усугубляется тем, что существуют случаи, когда подтверждения делают гипотезу менее вероятной. Предположим, что вы выкладываете на стол карты из тщательно перетасованной колоды и переворачиваете их, чтобы подтвердить гипотезу, согласно которой карт зеленой масти не существует. Первые 10 карт оказываются обычными игральными картами, но затем вы неожиданно обнаруживаете карту синей масти. Это — одиннадцатый подтверждающий случай, но теперь ваша уверенность в правильности исходной гипотезы сильно поколеблена. Пол Бернет привел еще несколько аналогичных примеров. Предположим, что обнаружен человек ростом 29 м 70 см. Сообщение о таком человеке является подкрепляющим примером для гипотезы "Все люди ростом меньше 30 м", тем не менее обнаружение такого человека ослабляет гипотезу. Обнаружение человека нормальных размеров в невероятном месте (например, на спутнике Сатурна Титане) — еще один пример подтверждающего наблюдения, ослабляющего ту же гипотезу.

Подтверждения могут даже привести к опровержению гипотезы. Предположим, что 10 карт всех значений от туза до десятки перетасованы и выложены в ряд вверх рубашкой. Гипотеза состоит в том, что ни одна карта со значением n не находится на n-м месте от левого конца ряда. Вы переворачиваете первые 9 карт. Каждая перевернутая вами карта подтверждает гипотезу. Но если ни одна из 9 перевернутых карт не является десяткой, то, взятые вместе, эти 9 карт опровергают гипотезу.

А вот еще один пример. На столе 2 кучки по 3 карты в каждой. В одной из кучек валет, дама и король червей. В другой — валет, дама и король треф. Обе кучки тщательно перетасованы. Смит вытягивает одну карту из червовой кучки. Джонс одну карту из трефовой кучки. Гипотеза состоит в том, что пара выбранных карт состоит из дамы и короля. Вероятность этого равна 2/9. Взглянув на свою карту, Смит видит, что вытащил короля. Не называя вытянутую им карту, Смит заявляет, что извлек карту, подтверждающую гипотезу. Почему? Как показывает вычисление условной вероятности, если Смиту известно, что он вытянул короля, то вероятность того, что гипотеза верна, повышается с 2/9 до 3/9 (=1/3). Но теперь Джонс видит, что он (Джонс) извлек короля, и делает заявление, аналогичное заявлению Смита. Каждая карта в отдельности является подтверждающим примером. Взятые же вместе, карты опровергают гипотезу.

Карнап сознавал, что такого рода трудности существуют. Он проводил четкое различие между "степенью подтверждения" — величиной вероятности, получаемой на основе всех имеющихся данных и тем, что он называл "значимостью подтверждения", учитывающей, как новые наблюдения изменяют оценку подтверждения. Значимость подтверждения не сводится к вероятностям. Это гораздо более сложная характеристика, включающая множество аргументов, противоречащих интуиции. В главе 6 своих “Логических оснований” Карнап анализирует группу тесно связанных между собой парадоксов значимости подтверждения, легко моделируемых с помощью игральных карт.

Например, может представиться такой случай, когда данные подтверждают каждую из двух гипотез в отдельности, но не подтверждают те же две гипотезы, взятые вместе. Рассмотрим 10 карт, половина из которых с синими рубашками, половина — с зелеными. Предположим, что зеленые рубашки имеют следующие карты: червовая дама, червовая десятка, червовая девятка, король пик и пиковая дама, а синие рубашки — король червей, червовый валет, десятка пик, девятка пик и восьмерка пик. Перетасуем эти 10 карт тщательно и выложим их в ряд вверх рубашкой.

Гипотеза A состоит в утверждении, что свойство быть картой “с картинкой” (королем, дамой или валетом) в большей степени присуще картам с зеленой рубашкой, чем картам с синей рубашкой. Как показывает простая проверка, их 5 карт с зеленой рубашкой 3 карты с картинкой, тогда как из 5 карт с синей рубашкой картинку имеют только 2 карты. Гипотеза B состоит в утверждении, что свойство быть картой красной масти (бубновой или червовой) также в большей степени присуще картам с зеленой рубашкой, чем картам с синей рубашкой. Вторая проверка подтверждает эту гипотезу: среди карт с зелеными рубашками имеются 3 карты красной масти, а среди карт с синими рубашками — только 2. Интуитивно кажется, что свойство одновременно быть картой красной масти и картой с картинкой в большей мере присуще картам с зеленой рубашкой, чем картам с синей рубашкой, но это не так: только одна карта красной масти с картинкой имеет зеленую рубашку, в то время как среди карт с синими рубашками таких две!

Нетрудно придумать сценарии как фантастические, так и реалистические, по которым могут возникнуть аналогичные ситуации. Некая женщина хочет выйти замуж за человека, который был бы богат и добр. Среди ее знакомых есть лысые холостяки и холостяки с пышной шевелюрой. Будучи по профессии статистиком, наша дама производит выборочную инспекцию. Проект A устанавливает, что богаты $3/5$ холостяков с шевелюрой и только $2/5$ лысых холостяков. Проект B обнаруживает, что добры $3/5$ холостяков с шевелюрой и только $2/5$ лысых холостяков. Действуя опрометчиво, наша героиня могла бы придти к поспешному выводу о том, что ей следует выйти замуж за холостяка с пышной шевелюрой, но если распределение качеств соответствует распределению карт с картинкой и карт красной масти из предыдущего примера, то ее шансы выйти замуж за богатого о доброго человека были бы вдвое выше, сделай она ставку на лысых женихов.

В рамках другого исследовательского проекта установлено, что $3/5$ пациентов, принимавших некоторое лекарство, сохраняют иммунитет к простудным заболеваниям на протяжении 5 лет по сравнению с $2/5$ членов контрольной группы, получившей вместо лекарства плацебо[4]. Второй проект показал, что $3/5$ пациентов, получавших некоторое лекарство, обрели иммунитет к кариесу зубов на 5 лет, по сравнению с $2/5$ членов контрольной группы, получавших плацебо. Объединенная статистика могла бы в этом случае показать, что доля тех, кто приобрел на 5 лет иммунитет к простудным заболеваниям и кариесу, среди получавших плацебо выше, чем среди получавших лекарство.

Удивительным примером того, как гипотеза может подтверждаться двумя независимыми исследованиями и опровергаться совместными результатами, может служить следующая игра. Ее можно моделировать с помощью игральных карт, но для разнообразия мы воспользуемся 41 фишкой для игры в покер и 4 шляпами. На столе A в черной шляпе лежат 5 цветных и 6 белых фишек. Рядом, в серой шляпе, лежат 3 цветные и 4 белые фишки. На столе B в черной шляпе лежат 6 цветных и 3 белых фишки, а в серой шляпе — 9 цветных и 5 белых фишек. Содержимое шляп представлено в виде таблиц.

	черная	серая
цвет.	5	3
белая	6	4

Стол A

	черная	серая
цвет.	6	9
белая	3	5

Стол B

	черная	серая
цвет.	11	12
белая	9	9

Стол C

Вы подходите к столу A с намерением вытянуть цветную фишку. Из какой шляпы вам следует ее извлечь: из черной или из серой? В черной шляпе 5 из 11 фишек цветные, поэтому вероятность извлечь цветную фишку из черной шляпы равна $5/11$. Это больше, чем $3/7$ — вероятность

[4]Физиологически нейтральное вещество, неотличимое по виду от лекарственного препарата.

извлечь цветную фишку из серой шляпы. Ясно, что, выбрав черную шляпу, вы имеете больше шансов вытащить цветную фишку.

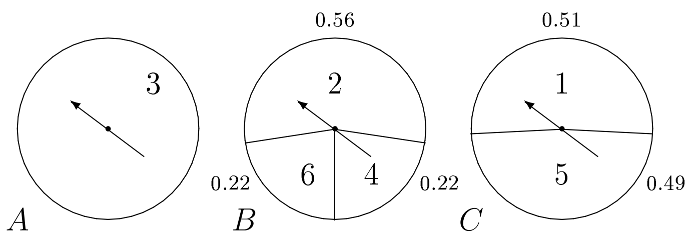
На столе B вам также выгоднее выбрать черную шляпу: в ней 6 из 9 фишек цветные, поэтому вероятность извлечь из нее цветную фишку составляет $6/9$ $(=2/3)$. Это больше, чем вероятность $9/14$ извлечь цветную фишку из серой шляпы.

Предположим теперь, что фишки из двух черных шляп на столах A и B сложены в одну черную шляпу, а фишки из двух серых шляп — в одну серую шляпу (стол C). Если вы захотите извлечь цветную фишку, то скорее всего выберете черную шляпу. Самое удивительное состоит в том, что ваш выбор неверен! Теперь в черной шляпе из 20 фишек цветных 11, поэтому вероятность извлечь цветную фишку из черной шляпы равна $11/20$, в то время как вероятность извлечь цветную фишку из серой шляпы равна $12/21$, что больше $11/20$.

К. Блайт, обнаруживший эту ситуацию в работе Э. Симпсона, опубликованной в 1951 году, назвал ее парадоксом Симпсона. В действительности парадокс оказался более старым, но название сохранилось. Нетрудно видеть, каким образом парадокс Симпсона мог бы возникнуть в реальном исследовании. Например, в двух сериях испытаний, проводимых независимо друг от друга, могли быть получены данные, позволяющие полагать, что некоторый лекарственный препарат оказывает на мужчин более сильное действие, чем на женщин, в то время как совместные данные привели бы к обратному выводу.

Кому-нибудь из читателей, возможно, покажется, что подобного рода ситуации носят слишком искусственный характер, чтобы их можно было встретить в реальном статистическом исследовании. Однако парадокс Симпсона действительно встретился в одном статистическом исследовании, проведенном с целью выяснения, не отдается ли при отборе кандидатов в аспирантуру при Калифорнийском университете в Беркли преимущество представителям одного пола перед другим.

Блайт придумал еще один парадокс, поверить в который еще труднее, чем в парадокс Симпсона. Парадокс Блайта можно моделировать с помощью трех наборов игральных карт или трех специальным образом изготовленных (“мошеннических”) игральных костей с определенным распределением вероятностей выпадения граней. Мы будем моделировать парадокс Блайта с помощью трех волчков, изображенных на рисунке, их легко изготовить каждому, кто вздумает проверить этот парадокс экспериментально.



Волчок A с неразделенной круговой шкалой — самый простой. Независимо от того, где останавливается стрелка, он порождает одну и ту же величину, равную 3. Волчок B порождает значения 2, 4 или 6 с вероятностями 0.56, 0.22 и 0.22. Волчок C порождает значения 1 или 5 с вероятностями 0.51 и 0.49.

Вы выбираете один волчок, а ваш приятель — другой. Каждый из вас запускает стрелку, и тот, у кого стрелка покажет на бо́льшее число, считается выигравшим. Предположим, что позднее, когда вы наберетесь опыта, вам представится возможность сменить волчок. Какой волчок вам следовало бы выбрать? Если сравнить волчки попарно, то мы обнаружим, что A выигрывает у B с вероятностью 0.56, A выигрывает у C с вероятностью 0.51 и B выигрывает у C с вероятностью

$$(1 \cdot 0.22) + (0.22 \cdot 0.51) + (0.56 \cdot 0.51) = 0.6178.$$

Ясно, что лучше всего выбрать волчок A, позволяющий получить более высокий результат, чем 2 других волчка с вероятностью, превышающей 1/2. Наихудший выбор — волчок C, так как с вероятностью, превышающей 1/2, он дает менее высокие результаты, чем волчки A и B.

А теперь о самом главном. Предположим, что вы играете с двумя партнерами и что вам предоставлено право первым выбрать волчок. Затем все три волчка запускаются, и тот из игроков, у кого стрелка волчка покажет на наибольшее число, объявляется победителем. Вычисление вероятностей выпадения различных чисел обнаруживает необычайный факт. Наихудшим выбором является волчок A, наилучшим — волчок C! Волчок A обеспечивает выигрыш с вероятностью

$$0.56 \cdot 0.51 = 0.2856,$$

то есть меньше 1/3. Волчок B обеспечивает выигрыш с вероятностью

$$(0.44 \cdot 0.51) + (0.22 \cdot 0.49) = 0.3322,$$

то есть почти $1/3$. Наконец, волчок C обеспечивает выигрыш с вероятностью

$$0.49 \cdot 0.78 = 0.3822,$$

или чуть больше $1/3$.

Задумаемся над тем, к каким разрушительным последствиям для статистических исследований приведет парадокс Блайта. Предположим, что лекарство от некоторой болезни по эффективности подразделяют на 6 категорий, которым мы сопоставим числа от 1 до 6 (большее число соответствует более высокой эффективности). Лекарство A равномерно эффективно и оценивается 3 баллами (волчок A). Эффективность лекарства C варьируется со временем: на протяжении 0.51 времени испытания его эффективность оценивается 1 баллом, а 0.49 времени — 5 баллами (волчок C). Если фармацевтическая промышленность выпускает только лекарства A и C и врач желает максимизировать шансы пациента на выздоровление, то он, очевидно, отдаст предпочтение лекарству A.

А что произойдет, если в аптеке появится препарат B с распределением вероятностей, соответствующим волчку B? Сбитый с толку врач, встав перед проблемой выбора одного из трех лекарств, отдаст предпочтение лекарству C перед лекарством A.

Блайт изыскал способ еще сильнее драматизировать свой парадокс. Представьте себе, что некий статистик каждый вечер обедает в ресторане, в котором посетителю предлагают на десерт яблочный пирог и вишневый пирог. Свои оценки от дегустации того и другого пирога статистик выставляет по шестибалльной системе — от 1 до 6. Яблочный пирог неизменно удостаивается одной и той же оценки в 3 балла (волчок A). Оценки вишневого пирога варьируются так же, как показания стрелки волчка C. Естественно, что статистик всегда выбирает яблочный пирог.

Изредка в меню ресторана появляется пирог с черникой. Выставляемые статистиком оценки варьируются так же, как показания стрелки волчка B. Между официанткой и статистиком происходит следующий разговор.

Официантка. Принести вам яблочный пирог?

Статистик. Нет. Я вижу, у вас сегодня пирог с черникой. Принесите мне лучше вишневый пирог.

Официантка скорее всего воспримет такой ответ как шутку, хотя в действительности статистик действует вполне рационально, пытаясь максимизировать свою среднюю оценку.

12 Курьезы теории вероятностей

Мы хотим рассказать[5] об одном весьма интересном случае, когда и сильные и слабые стороны математической теории азартных игр проявились особенно наглядно.

В 1960 году преподавателю математики университета Лос-Анджелеса Эдварду О. Торпу во время зимних каникул случилось провести несколько дней в Лас-Вегасе. Воспользовавшись оказией, Торп заглянул в один из игорных домов, сел играть в "двадцать одно" и, разумеется, проиграл. Раздосадованный неудачей, ученый принялся размышлять над тем, какая стратегия оптимальна для игрока при игре в двадцать одно (точнее, в том варианте этой игры, который принят в игорных домах штата Невада)[6].

Как известно, при игре в двадцать одно банкомет (служащий игорного дома) сдает игрокам по 2 карты из тщательно перетасованной колоды в 52 листа. Полученные карты банкомету не показывают. Самому себе банкомет сдает 2 карты и первую из них показывает игрокам. Карты оцениваются по следующей шкале: все фигуры (валеты, дамы, короли) получают по 10 очков, а остальные карты, за исключением тузов, — то количество очков, которое совпадает с их значением (например, семерки — по 7 очков). Туз оценивается либо в 1 очко, либо в 11 очков. Выигрывает тот, у кого сумма очков оказывается наиболее близкой к 21 (оставаясь при этом не больше 21).

Оценив сданные ему карты, каждый игрок имеет право прикупить столько карт, сколько сочтет необходимым, но если сумма очков набранных им карт превзойдет 21, то игрок должен показать свои карты и выбыть из игры. Банкомет также может прикупать карты. Верхний и нижний пределы ставок устанавливаются заранее, но в остальном игроки могут выбирать размеры ставок по своему усмотрению. Если карты игрока лучше, чем у банкомета, то игрок получает выигрыш в размере

[5] Материал этого параграфа заимствован из книги А. Реньи "Трилогия о математике".

[6] В США игорные дома и азартные игры запрещены законодательством большинства штатов. Штат Невада составляет исключение: в нем игорный бизнес процветает вполне легально.

сделанной ставки, а если хуже, то теряет свою ставку. Если сумма очков у игрока и у банкомета оказывается равной (например, если оба они набирают по 21 очку), то каждый из них остается при своих деньгах.

Большое преимущество банкомета состоит в том, что игроку всякий раз приходится открывать свои карты и в случае перебора он проигрывает сделанную ставку, даже если у банкомета также будет перебор. Выяснить последнее обстоятельство в действительности не удается, так как банкомет не обязан открывать игроку свои карты, он лишь сгребает ставки специальной лопаточкой, если все игроки бросают свои карты.

Торп обратил внимание на то, что во всех игорных домах существуют строгие правила, предписывающие служащим игорного дома выбор определенной стратегии в той или иной ситуации[7]. Например, одно из правил гласит: если сумма набранных очков больше или равна 17, то банкомет не должен прикупать карты. Торп решил, что поскольку игрок в отличие от банкомета не обязан выполнять никакие жесткие правила и показывать первую из сданных ему карт и, кроме того, может выбирать по своему усмотрению размер ставки, то, несмотря на определенное преимущество (о котором мы уже упоминали) банкомета перед игроками, вполне возможно (по крайней мере принципиально) разработать стратегию, выигрышную для игрока. Торп исходил главным образом из того, что в игорных домах штата Невада в то время для ускорения игры не было принято тасовать карты после каждой партии: банкомет сдавал карты до полного "исчерпания" колоды, а затем собирал и тасовал отброшенные карты. Этот обычай позволял игроку, заметившему, какие карты "вышли" из игры, внести надлежащие коррективы в свою стратегию и тем самым повысить шансы на выигрыш, разумеется при условии, что он сумеет распорядиться собранной информацией. Ясно, что игрок должен знать, с какой вероятностью банкомет может извлечь ту или иную карту из неполной колоды и как строить стратегию, обеспечивающую ему наибольшее преимущество. Правила для отыскания оптимальной стратегии должны быть простыми и легко запоминающимися, поскольку игроку необходимо в считанные секунды решать, будет ли он прикупать новые карты или воздержится. Торп не пожалел труда и, проведя соответствующие расчеты на компьютере, разработал

[7]Требуя от своих служащих неукоснительного соблюдения этих правил, владельцы игорных домов стремятся воспрепятствовать вступлению банкомета в тайный сговор с игроками, что (вопреки обычному распределению доходов) нанесло бы ущерб интересам владельцев.

весьма удобную стратегию, обеспечивающую игроку перед банкометом преимущество в несколько процентов. О своих результатах Торп сообщил в докладе на заседании Американского математического общества, состоявшемся в 1960 году в Вашингтоне. Доклад вызвал необычайный интерес, а несколько дней спустя Торп получил от некоего бизнесмена письмо с чеком на 100 тысяч долларов, предназначенных для проверки выигрышной стратегии на практике. Торп принял чек и, выучив сформулированные им правила наизусть, отправился в Неваду, чтобы испытать свое открытие. Испытание прошло успешно: менее чем за 2 часа Торп выиграл 17 тысяч долларов. Разумеется, владелец игорного дома не разделял восторгов Торпа и его компаньонов по поводу успешного исхода испытания и на следующий день предпринял все от него зависящее, чтобы помешать Торпу снова сесть за игорный стол. Позднее Торп попытался проникнуть в другие игорные дома, но весть о нем уже успела распространиться и двери всех игорных домов неизменно оказывались закрытыми для него. Несколько раз, нацепив фальшивую бороду и загримировавшись под китайца, Торп все же добирался до игорного стола, но при любой маскировке его неизменно выдавал постоянный выигрыш. От дальнейших проверок разработанном им стратегии Торпу пришлось отказаться. За свое “изгнание” он отомстил владельцам игорных домов, издав книгу, в которой подробно изложил найденные им правила. Число игроков, овладевших выигрышной стратегией по книге Торпа, оказалось столь велико, что владельцам игорных домов в штате Невада не оставалось ничего другого, как радикальнейшим образом изменить правила игры. В числе этих изменений новые правила предусматривают непременное тасование карт после каждой партии, что обращает в прах краеугольный камень выигрышной стратегии Торпа.

13 Несколько интересных задач

1. Продавец газет покупает издания по \$0.5, а продает их по \$1.0. Если некоторые газеты останутся нераспроданными, то их можно вернуть назад по цене \$0.2. Спрос на газеты является случайным. Как нужно организовать закупку газет, чтобы, по возможности, иметь прибыль, если известен объем спроса в течение последних 100 дней: 0 газет — 3 дня, 10 газет — 17 дней, 20 газет — 37 дней, 30 газет — 29 дней, 40 газет — 12 дней, 50 газет — 2 дня?

2. Видеопрокат работает по схеме, согласно которой фильмы предлагаются до тех пор, пока на них имеется спрос. В случае отсутствия достаточного спроса ассортимент фильмов обновляется в надежде получить новый успешный набор. Известно, что после успешной недели видеопроката есть равные шансы преуспеть или потерпеть неудачу, а также, что после обновления ассортимента, имеются 7 шансов из 10 преуспеть. Когда две недели подряд приводят к успеху, доход достигает \$5000; успех, за которым следует неудача, — только \$1500; успех, следующий за неудачей, приносит доход \$2000; повторная неудача приносит убыток в \$4000. Спрашивается, какую прибыль в среднем приносит видеопрокат еженедельно?

3. Двое играют в "орлянку". До начала игры у одного из них было m монет, а у другого — n монет. Ставка равна одной монете. Игра идет до тех пор, пока один из участников не проиграется. Сколько раз в среднем придется бросить монету, прежде чем игра закончится?

4. Пятница — 13. Докажите, что тринадцатое число месяца с бо́льшей вероятностью приходится на пятницу, чем на другие дни недели. Решив эту задачу, вы обоснуете "научным образом" известное суеверие!

5. Фирмы, занимающиеся выпуском жевательной резинки, производят к каждой резинке вкладыш. Какое число резинок в среднем придется купить (и, соответственно, пережевать), чтобы собрать полную коллекцию вкладышей (например, 99 штук)?

6. Тонкий расчет в "Любви с первого взгляда". Предположим, что в телеигре "Любовь с первого взгляда" юноши и девушки делают свой выбор независимо друг от друга, выбирая партнера с равными вероятностями. Каковы вероятности совпадения одной, двух, трех пар?

7. Наилучший выбор при полном отсутствии информации. В урне находятся n шаров, на каждом шаре написано число, все числа различны и заранее неизвестны. Игра состоит в следующем. Играющий выбирает наудачу шар из урны, смотрит, какое число написано на шаре, и решает — берет он этот шар или нет. Если не берет, то выбранный шар отбрасывается, и все начинается заново. Если же игрок берет шар, то игра прекращается. Игрок побеждает, если на шаре окажется самое большое число среди всех написанных на шарах чисел. Как необходимо играть, чтобы максимизировать свои шансы на выигрыш?

Эту задачу обычно называют задачей о выборе приданного и формулируют, например, таким образом:

“Король выдает свою дочь замуж. Принцесса, не имея возможности выйти замуж по любви, хочет сделать это по расчету, получив как можно большее приданное. Известно, что будут свататься n принцев, но неизвестно, кто из них предложит наибольшее приданное. Как должна действовать принцесса, делая свой выбор, чтобы с наибольшей вероятностью заполучить себе в мужья богатейшего из женихов? Того, кому принцесса отказала, уже не вернуть, даже если его приданное оказалось самым большим.”

14 Решения и ответы

Задачи §1.

1. Пусть, к примеру, для некоторой семьи из четырех детей запись МДДМ означает, что в семье старший ребенок — мальчик, затем родились две девочки, а последний ребенок — снова мальчик. Ясно, что всего существует 16 вариантов подобных слов, описывающих распределение детей по возрасту: ДДДД, ДДДМ, ДДМД, ДДММ, ДМДД, ДМДМ, ДММД, ДМММ, МДДД, МДДМ, МДМД, МДММ, ММДД, ММДМ, МММД, ММММ. По условию задачи вероятность рождения мальчика такая же, как и вероятность рождения девочки, поэтому все описанные выше комбинации равноправны. Из них 6 комбинаций описывают “удачные” семьи, так что вероятность того, что семья будет удачной, равна $6/16 = 3/8 < 1/2$.

2. Каждый игральный кубик имеет 6 граней. Первый кубик может выпасть одним из шести возможных способов. Второй кубик, независимо от первого, также может выпасть одним из шести возможных способов. Таким образом, всего существует $6 \cdot 6 = 36$ способов для выпадения пары игральных костей. Петров выигрывает, если выпадает одна из следующих шести комбинаций: $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$. Поэтому Петров побеждает с вероятностью $6/36$. Для Васечкина выигрышными являются пары $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$, так что победа для него возможна с вероятностью $5/36$. В результате выходит, что шансы на победу для Петрова относятся к шансам на победу у Васечкина как $6 : 5$.

3. Предположим, что охотники вышли на охоту 1000 раз. Из условия задачи следует, что первый охотник промахивается с вероятностью 0.4, поэтому после 1000 выстрелов первого охотника останутся целыми 400 зайцев. После 1000 выстрелов второго охотника по тем же зайцам (охотники стреляют одновременно, так что в некоторых из них первый охотник уже попал) из 400 целых зайцев таковыми останутся лишь $400 \cdot 0.7 = 280$. Наконец, после выстрелов третьего охотника уцелеют $280 \cdot 0.9 = 252$ зайца. Следовательно, из 1000 зайцев убитыми будут $1000 - 252 = 748$ зайцев, так что искомая вероятность составляет 0.748.

4. Пусть на старт вышли N автомобилей. Тогда через мост проедут $\frac{4}{5}N$ машин, затем через вираж пройдут $\frac{7}{10} \cdot \frac{4}{5}N = \frac{14}{25}N$ автомобилей, после туннеля уцелеют $\frac{9}{10} \cdot \frac{14}{25}N = \frac{63}{125}N$ машин и, наконец, после песчаной дороги останется $\frac{3}{5} \cdot \frac{63}{125}N = \frac{189}{625}N$ автомобилей. Выходит, что все остальные машины попали в аварию. Их количество равно $\frac{436}{625}N$, то есть что-то около 70%.

5. Пусть доля карт с картинками в колоде равна p. Тогда вероятность не вытянуть картинку равна $1 - p$. Если вытягивать карту три раза, то вероятность все три раза не вытянуть картинку составляет $(1 - p)^3$. Но тогда вероятность вытянуть картинку хотя бы один раз равна $1-(1-p)^3$, что по условию равно $\frac{19}{27}$. Решая уравнение $1 - (1 - p)^3 = \frac{19}{27}$, находим, что $p = \frac{1}{3}$.

6. Кубик A выигрывает у кубика B только тогда, когда на A выпадает пятерка, а на B — двойка. На кубике A имеется три пятерки, на кубике B — четыре двойки, так что из 36 возможных способов выпадения пары кубиков выигрыш кубика A происходит лишь в $3 \cdot 4 = 12$ случаях. В остальных 24 случаях побеждает кубик B, так что он вдвое лучше кубика A. Теперь рассмотрим кубики B и C. Кубик C побеждает тогда, когда на кубике B выпадает двойка. Это происходит с вероятностью $2/3$, значит кубик C вдвое лучше, чем B. Далее, игральная кость D выигрывает у C с вероятностью $2/3$, так как это происходит при выпадении на D четверки. Наконец, кубик D выигрывает у A, если на D выпадает четверка, а на A — единица. Это возможно в $3 \cdot 4 = 12$ случаях из 36, так что D вдвое слабее, чем A.

Можно придумать массу практических применений данной игры. В частности она может рассматриваться как “один из способов относительно честного отъема денег у населения”.

Задачи §2.

1. Число билетов, не содержащих цифру 5, равно $9^6 - 1$, потому что на каждое из шести возможных мест можно поставить одну из девяти цифр, отличных от пятерки, а номера 000 000 не бывает (из-за этого в формуле вычитается единица). Таким образом, надо сравнить числа $9^6 - 1$ и $999\,999 - (9^6 - 1)$, которые равны, соответственно, 531 440 и 468 559. Следовательно, вероятность купить автобусный билет, содержащий цифру 5, чуть меньше $1/2$.

2. Всего существует 999 номеров. Условию а) удовлетворяют 9 номеров (111, 222, ... , 999), условию б) удовлетворяют $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 9 = 720$ номеров. Ответы: а) $\dfrac{9}{999}$; б) $\dfrac{720}{999}$.

3. Вычислим общее число способов расстановки n ладей на доске. Первую ладью можно поставить 64 способами, вторую — 63 способами (одно поле занято первой ладьей), ... , n-ю ладью можно поставить $65 - n$ способами. По правилу произведения заключаем, что общее число способов выставить ладей на доске составляет $64 \cdot 63 \cdot \ldots \cdot (65 - n) = A_{64}^n$. Теперь подсчитаем количество благоприятных способов, когда ладьи не бьют друг друга. Первую ладью можно выставить 64 способами, вторую — 49 способами (некоторые поля уже бьются первой ладьей; их количество равно 14 вне зависимости от положения ладьи), третью — 36 способами (учитываем поля, простреливаемые двумя первыми ладьями) и т. д. Ладья с номером n может быть выставлена на доску $(9 - n)^2$ способами. Снова применяя правило произведения, заключаем, что благоприятных способов выставить n ладей на доске равно $8^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (9 - n)^2$, а искомая вероятность равна отношению числа благоприятных способов к общему числу способов. Для двух ладей получаем вероятность, равную $\dfrac{64 \cdot 49}{64 \cdot 63} = \dfrac{7}{9}$.

4. Две карты из колоды можно вытянуть $C_{36}^2 = \dfrac{36 \cdot 35}{2} = 630$ способами. Это общее число исходов случайного эксперимента. Две красные карты можно вытянуть $C_{18}^2 = \dfrac{18 \cdot 17}{2} = 153$ способами. Столькими же способами можно вытянуть из колоды две черные карты. Вероятность вытянуть две карты одного цвета получается равной $\dfrac{2 \cdot 153}{630} = \dfrac{17}{35}$, то есть чуть меньше $\dfrac{1}{2}$. Вероятность противоположного события (все карты разных цветов) равна $1 - \frac{17}{35} = \frac{18}{35}$. Задача для четырех карт решается аналогично. Вероятность вытянуть все карты одного цвета равна $\frac{2 \cdot C_{18}^4}{C_{36}^4} = \frac{2 \cdot 3060}{58\,905} = \frac{8}{77}$. Вероятность того, что при вытягивании из колоды четырех карт все они будут разных цветов, равна нулю, так как карты в колоде раскрашены в два цвета, а не в четыре.

5. Каждая буква может быть выбрана 12-ю способами независимо от других, так что всего существует $12^5 = 248\,832$ секретных слова, поэтому неудачных попыток открыть сейф может быть 248 831.

6. Один байт памяти может находиться в одном из 256 состояний. 32 Mb памяти составляют $32 \cdot 1024^2\text{b} = 33\,554\,432\text{b}$, так что Pentium с таким объемом памяти может находиться в $256^{33\,554\,432} \approx 1.43 \cdot 10^{80\,807\,124}$ различных состояниях.

7. Всего в наборе домино имеется 28 костей, поэтому общее число способов выбрать две кости домино равно $C_{28}^2 = \frac{28 \cdot 27}{2} = 378$. Кости домино бывают двух видов: дубли и не являющиеся дублями. Имеется $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способ, при котором выбираются два дубля, $C_7^1 \cdot C_{21}^1 = 147$ способов выбрать один дубль и один не дубль и $C_{21}^2 = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$ способов выбрать две кости, не являющиеся дублями (в сумме как раз и будет 378 способов). Если выбраны два дубля, то приложить их друг к другу не удается. Рассмотрим теперь те случаи, когда выбран один дубль и один не дубль. Пусть, например, выбран дубль 2:2. К нему можно приставить кости 0:2, 1:2, 3:2, 4:2, 5:2, 6:2 (6 вариантов). Такое же количество вариантов будет у каждого из семи дублей. Так как эти варианты не повторяются, то всего их будет $7 \cdot 6 = 42$. Осталось рассмотреть случаи, когда выбраны две кости, не являющиеся дублями. Пусть, например, одна из костей помечена как 1:2. Тогда к ней можно приложить кости 1:0, 1:3, 1:4, 1:5, 1:6, 2:0, 2:3, 2:4, 2:5, 2:6 (10 вариантов). Такое же количество вариантов будет для каждой из 21 кости, не являющейся дублем, так что общее число вариантов равно $10 \cdot 21 = 210$. Однако при таком подсчете каждый вариант учтен дважды, так что на самом деле существует 105 вариантов. Итак, всего имеется $42 + 105 = 147$ благоприятных исходов случайного эксперимента. Искомая вероятность равна $\frac{147}{378} = \frac{7}{18}$.

8. Если Ваня берет яблоко, то в корзине останется 11 яблок и

10 апельсинов, так что Надя имеет $11 \cdot 10 = 110$ способов выбора. Если же Ваня берет апельсин, то в корзине останется 12 яблок и 9 апельсинов, поэтому Надя имеет $12 \cdot 9 = 108$ способов выбора. Получается, что в первом случае Надя имеет бóльшую свободу выбора.

9. Две карты красной масти можно выбрать девятью способами (две шестерки, две семерки, ... , два туза). Столькими же способами можно выбрать две карты черной масти. По правилу произведения всего имеется 81 способ.

10. Каждое письмо можно вручить любому из трех курьеров, поэтому общее число способов раздать им письма равно $3^6 = 729$. Для определения вероятности того, что каждый курьер получит по крайней мере одно письмо, необходимо вычислить, сколькими способами можно раздать письма с соблюдением этого условия.

В трех случаях все письма достанутся какому-то одному курьеру. Только двум курьерам письма можно распределить $C_3^2 \cdot (2^6 - 2) = 3 \cdot 62 = 186$ способами (выбираем из трех курьеров двух, а затем распределяем между ними письма так, чтобы каждый получил по крайней мере по одному письму). Во всех остальных случаях письма распределятся между тремя курьерами. Поэтому благоприятных исходов будет $729 - 3 - 186 = 540$. Вероятность, которую требуется найти в задаче, равна $\dfrac{540}{729} = \dfrac{20}{27}$.

11. Из колоды в 32 карты можно вытянуть 10 карт C_{32}^{10} способами. При этом ровно один туз попадается в $C_4^1 \cdot C_{28}^9$ случаях (выбираем один из четырех тузов и девять не тузов), ровно два туза — в $C_4^2 \cdot C_{28}^8$ случаях и не одного туза — в C_{28}^{10} случаях. Таким образом, можно сразу ответить на вопросы б) и г) задачи. Нужные вероятности равны $\dfrac{C_4^1 \cdot C_{28}^9}{C_{32}^{10}}$ и $\dfrac{C_4^2 \cdot C_{28}^8}{C_{32}^{10}}$ соответственно. Число способов получить хотя бы один туз при раздаче равно общему числу способов раздать карты минус число способов, когда туз на руки не пришел. Это происходит в $C_{32}^{10} - C_{28}^{10}$ случаях. Число способов получить на руки не менее двух тузов определяется вычитанием из только что найденного результата количества способов получить ровно один туз и составляет $C_{32}^{10} - C_{28}^{10} - C_4^1 \cdot C_{28}^9$. Теперь, разделив полученные числа на общее число способов раздать карты, находим остальные вероятности. Ответы: а) $\dfrac{C_{32}^{10} - C_{28}^{10}}{C_{32}^{10}}$; б) $\dfrac{C_4^1 \cdot C_{28}^9}{C_{32}^{10}}$; в) $\dfrac{C_{32}^{10} - C_{28}^{10} - C_4^1 \cdot C_{28}^9}{C_{32}^{10}}$;

г) $\dfrac{C_4^2 \cdot C_{28}^8}{C_{32}^{10}}$.

12. Количество людей в таком государстве не превосходит числа способов расставить на 32 местах цифры 0 или 1, в зависимости от того, имеется на соответствующем месте зуб или нет. Так как расстановка цифр производится независимо друг от друга, то всего имеется 2^{32} способов сделать это. Таким образом, в государстве может быть не более 4 294 967 296 жителей (на Земле сейчас проживает около 6 млрд. чел).

13. Сначала выберем одного пассажира из тех, кому безразлично как сидеть (три возможных способа), и посадим его лицом к паровозу (пять вариантов). Потом рассадим четырех пассажиров, которые желают ехать лицом к паровозу на оставшихся четырех местах ($4! = 24$ способа), а оставшихся людей посадим спиной к паровозу ($5! = 120$ способов). По правилу произведения получаем ответ: $3 \cdot 5 \cdot 4! \cdot 5! = 43\,200$ способов.

14. Выберем из пяти дней два, когда мама дает яблоко. Ответ: $C_5^2 = 10$ способов. Аналогично решается вторая часть задачи. Ответ: $C_9^2 \cdot C_7^3 = 1260$ способов.

15. В слове “математика” 10 букв. Если бы все они были различными, то существовало бы 10! разных слов. Однако, если мы переставим, например, две буквы “м”, то слово останется прежним, так что необходимо разделить число перестановок из различных объектов на число перестановок повторяющихся объектов. В нашем случае повторяются буквы “м” (2 раза), “а” (3 раза), “т” (2 раза). Ответ: $\dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151\,200$ слов.

16. Извлечь три шара из урны, в которой всего находится 60 шаров, можно $C_{60}^3 = 34\,220$ способами. Вытянуть три шара так, чтобы все шары оказались разного цвета, можно $10 \cdot 20 \cdot 30 = 6000$ способами, поэтому ответ в пункте а) задачи равен $\dfrac{6000}{34\,220} \approx 0.175$.

Вытянуть три шара так, чтобы все шары оказались белого цвета, можно $C_{10}^3 = 120$ способами, так, чтобы все шары оказались черного цвета, — $C_{20}^3 = 1140$ способами, и, наконец, так, чтобы все шары были красного цвета, — $C_{30}^3 = 4060$ способами. Ответ пункта б) равен $\dfrac{120 + 1140 + 4060}{34\,220} \approx 0.155$.

17. Всего существует C_{20}^{10} способов разбить команды на две группы, так как, выбрав 10 команд из 20, мы формируем первую группу, а вторая группа составляется из оставшихся команд. Подсчитаем, сколькими способами можно делить команды на группы так, чтобы две наиболее сильные команды попали в одну группу. Здесь возможны два варианта: либо эти две команды попадают в первую группу, а остальные 8 команд выбираются произвольно из 18 остальных (C_{18}^8 способов), либо эти две команды не попадают в первую группу, а в эту группу попадают какие-то 10 команд из 18 остальных (C_{18}^{10} способов). Ответом задачи будет

$$\frac{C_{18}^8 + C_{18}^{10}}{C_{20}^{10}} = \frac{9}{19} \approx 0.474.$$

18. Из 90 жетонов можно вытянуть 5 жетонов C_{90}^5 способами. Если куплен билет с одним числом, то всего существует C_{89}^4 комбинаций, когда угадано одно число (остальные 4 числа из оставшихся 89 могут быть выбраны как угодно). Так что вероятность выигрыша равна $\dfrac{C_{89}^4}{C_{90}^5} = \dfrac{89! \cdot 5! \cdot 85!}{4! \cdot 85! \cdot 90!} = \dfrac{1}{18}$, откуда видно, что в среднем из 18 купленных билетов цена трех остается в кармане устроителей этой лотереи. Аналогично вычисляем остальные вероятности. Для билетов с двумя числами она составляет $\dfrac{C_{88}^3}{C_{90}^5} = \dfrac{88! \cdot 5! \cdot 85!}{90! \cdot 3! \cdot 85!} = \dfrac{2}{801}$, с тремя числами — $\dfrac{C_{87}^2}{C_{90}^5} = \dfrac{87! \cdot 5! \cdot 85!}{90! \cdot 2! \cdot 85!} = \dfrac{1}{11\,748}$, с четырьмя числами — $\dfrac{C_{86}^1}{C_{90}^5} = \dfrac{86! \cdot 5! \cdot 85!}{90! \cdot 1! \cdot 85!} = \dfrac{1}{511\,038}$ и, наконец, с пятью числами — $\dfrac{1}{C_{90}^5} = \dfrac{1}{43\,949\,268}$. Из этих результатов видно, что чем выше ставка, тем более невыгодной становится лотерея для тех, кто в нее играет.

19. Всего существует C_{36}^5 способов для выпадения пяти номеров из 36 номеров. Угадать все пять номеров можно лишь в одном случае, следовательно, искомая вероятность равна $\dfrac{1}{C_{36}^5}$, что составляет $\dfrac{1}{376\,992}$. Чтобы угадать четыре номера, нужно, чтобы из пяти выбранных номеров выпало ровно четыре, а из оставшихся номеров — любой. По правилу произведения находим число благоприятных исходов, которое равно $C_5^4 \cdot C_{31}^1 = 5 \cdot 31 = 155$. Аналогично вычисляется количество благоприятных исходов для трех номеров: $C_5^3 \cdot C_{31}^2 = 10 \cdot 465 = 4650$. Теперь легко найти и соответствующие вероятности $\dfrac{155}{376\,992}$ и $\dfrac{4650}{376\,992}$. Сделайте правильный вывод из полученных результатов!

20. Команда для бега на 1000 метров составляется $C_{30}^4 = 27\,405$ способами. Команда для участия в эстафете комплектуется $A_{30}^4 = 657\,720$ способами (здесь важен порядок входящих в команду спортсменов).

21. Выбрать 6 человек так, чтобы среди них было четверо мужчин и две женщины, можно $C_7^4 \cdot C_4^2 = 210$ способами. Выбрать 6 человек так, чтобы среди них было трое мужчин и три женщины, можно $C_7^3 \cdot C_4^3 = 140$ способами. И, наконец, выбрать 6 человек так, чтобы среди них было двое мужчин и четыре женщины, можно $C_7^2 \cdot C_4^4 = 21$ способом. По условию задачи женщин должно быть не менее двух, поэтому необходимо сложить полученные результаты. Ответ: 371.

22. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить $5^4 = 625$ различных четырехзначных чисел. Чтобы натуральное число делилось на 4 необходимо и достаточно, чтобы число, составленное из двух последних цифр, также делилось на 4. Мы имеем следующие возможности: $**\,12$, $**\,24$, $**\,32$, $**\,44$, $**\,52$. Первые две цифры можно выбирать произвольно (25 способов), поэтому благоприятных комбинаций получается 125. Теперь находим, что искомая вероятность равна $\dfrac{125}{625} = \dfrac{1}{5}$.

23. Представим себе, что пирожные в коробке лежат в ряд так, что сначала размещаются наполеоны, потом — эклеры, далее следуют песочные и, наконец, ряд завершают слоеные пирожные. В том месте, где соприкасаются пирожные разных сортов, установим перегородку. Если обозначить пирожные цифрой 0, а перегородки — цифрой 1, то мы получим некоторый код длиной в 10 цифр, состоящий из нулей и единиц. Например, код 0001001100 означает, что в коробке лежат три наполеона, два эклера, ни одного песочных и два слоеных пирожных. Ясно, что любой набор пирожных можно закодировать подобным образом, и, кроме того, по коду можно однозначно восстановить содержимое коробки со сладостями. Поэтому количество способов купить пирожные равно числу всевозможных кодов, состоящих из 10 нулей и единиц, в которых встречаются ровно 7 нулей. Таких кодов имеется C_{10}^7 (из 10 мест выбираются те 7 мест, где будут стоять нули, а на остальные места выставляются единицы). Так мы получаем ответ задачи: $C_{10}^7 = 120$. В общем случае, количество способов составить набор из n предметов, каждый из которых принадлежит одному из k типов (предметы одного типа неразличимы между собой), равно C_{n+k-1}^n, называется **числом сочетаний с повторениями** (в коробке может присутствовать несколько пирожных одного сорта).

24. Выбрать 3 рейки из 15 реек, имеющихся в конструкторе, можно

$C_{15}^3 = 455$ способами. Выбрать 3 рейки длины 2 сантиметра (для равностороннего треугольника) из 5 реек такого размера можно $C_5^3 = 10$ способами. Точно так же имеется по 10 способов составить равносторонний треугольник из реек длины 6 сантиметров и 10 сантиметров. Поэтому ответом на вопрос а) задачи будет число $\frac{30}{455} = \frac{6}{91}$. Из реек, содержащихся в конструкторе, можно составлять треугольники с длинами сторон $(2,2,2)$, $(2,6,6)$, $(2,10,10)$, $(6,6,6)$, $(6,6,10)$, $(6,10,10)$, $(10,10,10)$ сантиметров (остальные комбинации не удовлетворяют неравенству треугольника). Количество способов составить равносторонний треугольник уже подсчитано. Теперь прибавим оставшиеся варианты. Итого, имеем $3 \cdot C_5^3 + 4 \cdot C_5^1 \cdot C_5^2 = 230$ способов. Искомая вероятность равна $\frac{230}{455} = \frac{46}{91}$.

25. Решим задачу перебором. Если вытягивается одна карта, то вероятность того, что это карта пиковой масти, равна $\frac{1}{4}$, что меньше $\frac{1}{2}$. Если вытягиваются две карты, то вероятность того, что среди этих карт нет пиковых, равна $\frac{C_{27}^2}{C_{36}^2} = \frac{351}{630}$, поэтому вероятность, что среди вытянутых карт присутствуют пики, равна $1 - \frac{351}{630} < \frac{1}{2}$. По той же схеме находим аналогичную вероятность для трех карт: $1 - \frac{C_{27}^3}{C_{36}^3} = \frac{4215}{7140} > \frac{1}{2}$. Следовательно, ответ на первый вопрос задачи таков: необходимо вытянуть три карты. Теперь ответим на второй вопрос задачи. Вероятность того, что при вытягивании из колоды двух карт они будут одной масти, равна $\frac{4 \cdot C_9^2}{C_{36}^2} = \frac{144}{630} < \frac{1}{2}$. Следовательно, двух карт недостаточно. Проверим, хватит ли трех карт? Число способов вытянуть три карты из колоды определяется вычислением $C_{36}^3 = 7140$. Три карты разных мастей вытягиваются $C_4^3 \cdot 9^3 = 2916$ способами (выбираем из четырех мастей три, а потом вытягиваем по одной карте из девяти для каждой масти). Теперь число способов вытянуть две карты одной масти определяется с помощью вычитания из общего числа способов. Вероятность, которую требуется вычислить, равна $\frac{7140 - 2916}{7140} > \frac{1}{2}$. Следовательно, ответ на второй вопрос задачи такой же как и на первый: необходимо вытянуть три карты.

26. Выпишем все возможные способы достать из кармана 6 монет так, что этой суммы не хватит на оплату проезда: $2 \times 50 + 4 \times 10$,

$1 \times 50 + 5 \times 10$, 6×10 копеек. Первая сумма вынимается из кармана $C_5^2 \cdot C_{10}^4 = 2100$ способами, вторая — $C_5^1 \cdot C_{10}^5 = 1260$ способами, а третья — $C_{10}^6 = 210$ способами. Всего же из кармана извлечь 6 монет можно $C_{17}^6 = 12\,376$ способами. Вероятность того, что вынутых из кармана денег не хватит на оплату проезда, равна $\dfrac{2100 + 1260 + 210}{12\,376} = \dfrac{15}{52}$. Отсюда находим искомую вероятность — $\dfrac{37}{52}$.

27. В этой игре существует $3^3 = 27$ равновозможных исходов. Благоприятные исходы — это такие тройки чисел, где на первом месте стоит ваша цифра, не совпадающая со второй и третьей цифрами, относящимися к результатам бросков Джона и Чарли. Благоприятных исходов, где на первом месте стоит единица — четыре, вот они: $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(1, 3, 3)$. Аналогично обстоит дело с благоприятными исходами, где на первом месте расположена двойка или тройка. Всего имеем 12 благоприятных исходов. Вероятность, которую требуется определить в задаче, равна $\dfrac{12}{27} = \dfrac{4}{9}$, то есть меньше, чем $\dfrac{1}{2}$. Из таких результатов следует сделать вывод: не стоит играть с Джоном и Чарли в такую игру.

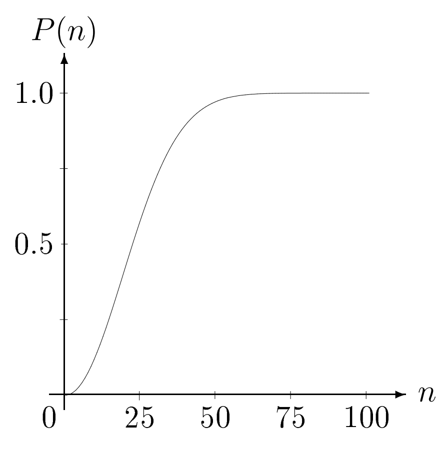
28. Без ограничения общности можно предположить, что козырями являются карты пиковой масти. Общее число способов получить из колоды 6 карт равно C_{35}^6 (стоит заметить, что одна из 36 карт уходит на то, чтобы объявить козыря, поэтому выбор шести карт происходит уже из оставшихся 35 карт). Ни одного козыря среди этих шести карт не будет в C_{27}^6 случаях, все карты окажутся козырными в C_8^6 случаях, а половина карт будут козырными в $C_8^3 \cdot C_{27}^3$ случаях. Записываем ответы на вопросы задачи: а) $\dfrac{C_{27}^6}{C_{35}^6} \approx 0.132$; б) $\dfrac{C_8^6}{C_{35}^6} \approx 5.95 \cdot 10^{-7}$; в) $\dfrac{C_8^3 \cdot C_{27}^3}{C_{35}^6} \approx 0.0035$.

29. Количество способов вытянуть ровно один бубновый туз равно C_{35}^5 (бубновый туз вытягиваем сразу, а потом извлекаем еще 5 карт из оставшихся 35 карт). Количество способов вытянуть ровно два каких-нибудь других туза равно $C_3^2 \cdot C_{32}^4$ (из трех не бубновых тузов вытягиваем два, а потом из оставшихся 32 карт достаем еще четыре). Так как $C_{35}^5 = 324\,632 > 107\,880 = C_3^2 \cdot C_{32}^4$, то вероятность иметь ровно один бубновый туз примерно в три раза выше.

30. Всего имеется $C_{12}^6 = 924$ способа проверить половину монет. Из них в $C_4^1 \cdot C_8^5 = 224$ способах попадется одна фальшивая монета, в $C_4^2 \cdot C_8^4 = 420$ способах обнаружится две фальшивые монеты, и, наконец, в $C_4^3 \cdot C_8^3 = 224$ способах окажется три фальшивые монеты. Вероятность того, что фальшивыми будут 1 или 3 монеты, равна $\dfrac{224+224}{924} = \dfrac{16}{33}$, а вероятность того, что фальшивыми окажутся две монеты, составляет $\dfrac{420}{924} = \dfrac{15}{33}$, то есть чуть меньше, чем в первом случае. Получается так, что лучше выбрать смерть за 2 фальшивые монеты и тюрьму за 1 или 3 фальшивые монеты, чем наоборот. А еще лучше было вообще не заниматься дворцовому чеканщику такими делами.

31. Вычислим вероятность того, что ни у кого из группы дни рождения не совпадут. Общее число способов распределения дней рождения по дням года равно 365^n, где n — число человек в группе. Чтобы дни рождения не совпали, нужно, чтобы первый человек родился в любой из 365 дней года, второй — в любой из оставшихся 364 дней года, третий — в любой из оставшихся 363 дней года и т. д. Последний, n-й человек может родиться в любой из оставшихся $366-n$ дней года. Получается, что вероятность того, что дни рождения ни у кого из членов группы не совпадут, равна $\dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (366-n)}{365^n}$. Вероятность противоположного события, которую и требуется отыскать в задаче, находится как дополняющая только что вычисленную до единицы. Ответ: $P(n) = 1 - \dfrac{364}{365} \cdot \dfrac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \dfrac{366-n}{365}$.

Вычисления, проводимые по этой формуле, дают следующие результаты: $P(10) = 0.117$, $P(20) = 0.411$, $P(22) = 0.476$, $P(23) = 0.507$, $P(30) = 0.706$, $P(50) = 0.970$, $P(100) = 1 - 3 \cdot 10^{-7}$, которые изображены графически на рисунке.



Таким образом, вероятность совпадения дней рождения очень быстро приближается к единице при увеличении n. Еще следует заметить, что при значении $n = 366$ выведенная формула дает ответ в точности равный единице. Это же гарантирует принцип Дирихле. Заметьте то обстоятельство, что при $n = 100$ вероятность совпадения дней рождения практически равна единице. Если вы являетесь членом какой-нибудь группы, проверьте на практике этот теоретический результат.

Задачи §3.

1. Определим событие A_k, $2 \leq k \leq 7$, обозначающее, что первый человек вышел на k-м этаже. Аналогично определим события B_k и C_k, относящиеся ко второму и третьему людям, вошедшим в лифт. События A_k попарно несовместны и равновероятны, так что $P(A_k) = 1/6$. То же самое можно сказать о событиях B_k и C_k. По условию задачи случайные события, относящиеся к разным людям, независимы. В пункте а) требуется вычислить вероятность события $A_4 B_4 C_4$:

$$\mathbb{P}(A_4 B_4 C_4) = \mathbb{P}(A_4) \cdot \mathbb{P}(B_4) \cdot \mathbb{P}(C_4) = 1/6^3 = 1/216.$$

В пункте б) требуется вычислить вероятность события $A_2 B_2 C_2 \cup A_3 B_3 C_3 \cup \ldots \cup A_7 B_7 C_7$. Пользуясь несовместностью и независимостью соответствующих событий, запишем:

$$\mathbb{P}(A_2 B_2 C_2 \cup A_3 B_3 C_3 \cup \ldots \cup A_7 B_7 C_7) =$$
$$= \mathbb{P}(A_2 B_2 C_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_7 B_7 C_7) =$$
$$= \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(C_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_7)\mathbb{P}(B_7)\mathbb{P}(C_7) =$$
$$= 6 \cdot 1/6^3 = 1/36.$$

Наконец, в пункте в) требуется найти вероятность объединения всех событий вида $A_i B_j C_k$, где среди индексов i, j, k нет совпадающих. Вероятность каждого из событий указанного вида составляет $1/216$. Из комбинаторного правила произведения следует, что количество указанных событий равно $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Так что ответом в этом случае будет $120/216 = 5/9$.

2. Пусть A_k, $1 \leq k \leq 20$, — событие, означающее, что лампочка с номером k исправна. По условию $\mathbb{P}(A_k) = 0.99$. Требуется определить $\mathbb{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{20})$. Считая, что лампочки выходят из строя независимо друг от друга, находим ответ, равный $0.99^{20} = 0.818$.

3. Сначала предположим, что в цепи имеется всего два элемента, которые работают исправно с вероятностями p_1 и p_2 и выходят из строя независимо друг от друга. Легко понять, что в случае их последовательного соединения по цепи идет ток с вероятностью p_1p_2 (должны работать оба элемента), а в случае последовательного соединения — с вероятностью $p_1 + p_2 - p_1p_2$ (должен работать хотя бы один из элементов). Так как любую цепь можно получить, используя только последовательные и параллельные соединения, то, применяя несколько раз написанные выше формулы, получаем ответ

$$(((2p - p^2) \cdot p) + p - ((2p - p^2) \cdot p) \cdot p) \cdot p = p^2 + 2p^3 - 3p^4 + p^5.$$

4. Обозначим выпадение герба через Г, выпадение решки — через Р, и пусть, например, запись РРГ означает, что при первом и втором бросании монеты выпадала решка, а при третьем — герб. Первый игрок выигрывает при появлении события

$$\text{Г} \cup \text{РРГ} \cup \text{РРРРГ} \cup \ldots$$

Вероятность этого события находится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии и равна

$$1/2 + 1/8 + 1/32 + \ldots = 2/3.$$

Второй игрок выигрывает при появлении события

$$\text{РГ} \cup \text{РРРГ} \cup \ldots$$

Вероятность такого события составляет

$$1/4 + 1/16 + \ldots = 1/3.$$

Так что шансы у первого игрока вдвое больше, чем у второго.

5. Оставив обозначения такими же, как в предыдущей задаче, можно выписать возможные варианты, когда первый игрок выигрывает после первого бросания монет. Это происходит тогда и только тогда, когда происходит событие $A = \{\text{ГРР}\}$. Его вероятность составляет $1/8$. Второй игрок побеждает, если происходит событие

$$B = \{\text{РГР} \cup \text{РРГ} \cup \text{РГГ} \cup \text{ГГГ}\}.$$

Его вероятность равна $1/2$. При реализации события

$$C = \{\text{РРР} \cup \text{ГГР} \cup \text{ГРГ}\},$$

имеющего вероятность $3/8$, игра повторяется.

Первый игрок выиграет в том и только том случае, если произойдет событие

$$A \cup CA \cup CCA \cup \ldots$$

(напоминаем, что, например, запись CA означает, что в первом бросании монет реализовалось событие C, а при втором — событие A). Вероятность p_1 указанного события находим как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$1/8 + 1/8 \cdot 3/8 + 1/8 \cdot (3/8)^2 + \ldots = 1/5.$$

Второй игрок победит в том и только том случае, если произойдет событие

$$B \cup CB \cup CCB \cup \ldots.$$

Вероятность p_2 выигрыша для второго игрока равна

$$1/2 + 1/2 \cdot 3/8 + 1/2 \cdot (3/8)^2 + \ldots = 4/5.$$

Таким образом, второй выигрывает в среднем в четыре раза чаще первого.

6. Если кладоискатель начинает с места, обозначенного звездочкой, то перед ним имеется четыре дороги, так что он может сразу же найти клад с вероятностью $1/4$. Обозначим это событие через A. С вероятностью $1/4$ кладоискатель идет по лабиринту влево и попадает в место, помеченное точкой, откуда с равными вероятностями может попасть либо в яму, либо назад, в место, помеченное звездочкой. Таким образом, отправляясь из места, где стоит звездочка, кладоискатель с вероятностью $1/8$ возвращается назад, после чего ситуация повторяется. Обозначим через B_k, $k \in \mathbb{N}$, случайное событие, состоящее в том, что кладоискатель после $2k$ ходов снова возвращается в первоначальное положение. Вероятность события B_k равна $1/8^k$. Клад будет найден в том и только том случае, если произойдет событие

$$A \cup B_1A \cup B_2A \cup \ldots,$$

вероятность которого находится как сумма бесконечной геометрической прогрессии:

$$1/4 + 1/4 \cdot 1/8 + 1/4 \cdot (1/8)^2 + \ldots = 2/7.$$

В случае из пункта б) кладоискатель не возвращается назад. Поэтому, судя по плану, если он сразу не найдет клад, то он его уже никогда не найдет. Таким образом, вероятность удачи в этом случае равна $1/4$.

7. Сначала разберемся с тем, как должен стрелять каждый из дуэлянтов.

Понятно, что Ивану ни в коем случае не стоит стрелять в Петра, так как в случае попадания Иван уже не сможет победить в дуэли. Так что Ивану можно либо стрелять в Сидора и потом, в случае попадания, "разбираться" с Петром, либо стрелять в воздух надеясь на то, что Петр и Сидор будут "разбираться" друг с другом.

Ситуация с Сидором предельно ясна: если до него дойдет очередь, то ему надо стрелять в сильнейшего из оставшихся противников, чтобы максимизировать свои шансы на победу.

Из предыдущих рассуждений следует, что Петр в свой ход (если тот до него дойдет) будет стрелять в Сидора, если тот еще будет жив.

Рассмотрим возможные варианты развития дуэли.

Случай 1. Предположим, что Иван выстрелил в Сидора и убил его. Теперь, чтобы ему остаться живым, надо, чтобы в перестрелке с Петром его противник промахивался, а Иван несколько (может быть нуль) раз промахнулся, а в последний раз попал. Используя формулу для вероятностей произведения независимых событий и суммы несовместных событий, находим, что это происходит с вероятностью, равной

$$0.3 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.5 + \ldots = 3/17.$$

Случай 2. Предположим, что Иван выстрелил в воздух, тогда Петр стреляет в Сидора, после чего дуэль может развиваться по двум сценариям.

а) Петр промахнулся (это бывает с вероятностью 0.3). Тогда Сидор убивает Петра, и Ивану, чтобы выжить необходимо попасть в Сидора. Описанная ситуация происходит с вероятностью

$$0.3 \cdot 1.0 \cdot 0.5 = 0.15 = 3/20.$$

б) Петр попал в Сидора (это бывает с вероятностью 0.7). Тогда начинается перестрелка Ивана с Петром, где первым стреляет Иван. Чтобы ему остаться живым, он должен стрелять так как это описано в случае 1. Описанная ситуация происходит с вероятностью

$$0.7 \cdot (0.5 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot (0.3 \cdot 0.5)^2 + \ldots) = 7/17.$$

Суммируя полученные вероятности, находим, что какой-нибудь один из указанных сценариев происходит с вероятностью $3/20 + 7/17 = 191/340$. Эта вероятность больше, чем получившаяся в случае 1. Так что Ивану выгоднее в свой первый ход выстрелить в воздух.

Осталось найти шансы остаться в живых для остальных дуэлянтов.

Петр останется цел в том и только в том случае, если он убьет Сидора и выиграет перестрелку с Иваном. Рассуждая аналогично тому, как это делалось в случае с Иваном, находим вероятность выжить для Петра:

$$0.7 \cdot (0.5 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.7+$$

$$+(0.5 \cdot 0.3)^2 \cdot 0.5 \cdot 0.7 + \ldots) = 98/340.$$

Наконец, Сидор останется в живых в том и только в том случае, если Петр промахнется, а затем промахнется и Иван. Это может случиться с вероятностью

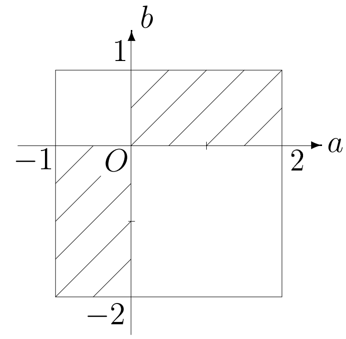
$$0.3 \cdot 0.5 = 0.15 = 51/340.$$

Так как вероятность, что хоть кто-то выживет, равна единице, то найденные вероятности в сумме должны давать 1. Непосредственная проверка показывает, что это так и есть.

Задачи §4.

1. Мишень состоит из концентрических кругов. Будем считать радиус самого маленького круга равным 1, тогда радиусы остальных кругов равны 2, 3 и 4. Мера множества всех исходов — это площадь круга радиуса 4, равная 16π. Площадь самого маленького круга, имеющего единичный радиус, равна π. Так что вероятность выбить 4 очка составляет $1/16$. Площадь кольца, при попадании в которое выбивается 3 очка, находим как разность площадей кругов с радиусами 2 и 1, получая 3π. Поэтому 3 очка можно выбить с вероятностью $3/16$. Аналогично находим оставшиеся вероятности для двух очков и одного очка. Они равны $5/16$ и $7/16$. Ответ: $7/16$, $5/16$, $3/16$, $1/16$.

2. Изобразим на координатной плоскости Oab прямоугольник, расположенный между прямыми, задаваемыми уравнениями $a = -1$, $a = 2$, $b = -2$, $b = 1$. Этот прямоугольник является множеством всех возможных исходов случайного эксперимента, связанного с загадыванием чисел. Координаты каждой точки есть пара загаданных чисел и наоборот. Уравнение будет иметь положительный корень в том и только в том случае, когда числа a и b имеют одинаковые знаки. Множество всех точек с такими координатами образуют два заштрихованных прямоугольника. По формуле для определения вероятности этого события получаем ответ для пункта а), равный $\dfrac{2+2}{9} = \dfrac{4}{9}$. Для решения задачи из пункта б) заметим, что множеством благоприятных исходов является отрезок оси Ob, содержащийся в большом прямоугольнике. Так как площадь отрезка равна нулю, то и ответ в этом пункте — нуль.

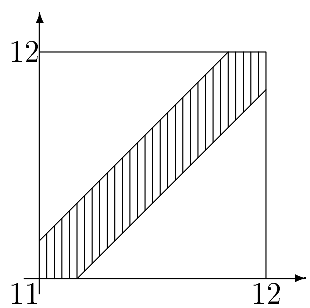


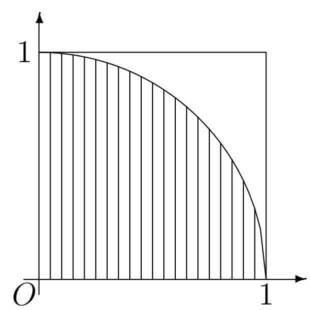
3. Считая, что угол α — это угол между осью корабля и минным заграждением, найдем размер "проекции" корабля на заграждение. Проекцию можно считать "дырой", которую оставит на минном заграждении судно при прохождении сквозь него. Размер "дыры" легко вычисляется с помощью формул тригонометрии и равен $20/\cos\alpha$. Вероятность подрыва корабля на мине — это вероятность того, что в "дыру" угодит хотя бы одна мина. Если $20/\cos\alpha \geq 100$, то ширина проекции столь велика, что корабль в любом случае попадет на мину. Это происходит, если $\cos\alpha \leq 1/5$, то есть при $\alpha \geq 78,46^0$. В противном случае ($\alpha < 78,46^0$) работает геометрическая схема вероятности на отрезке. Вероятность подрыва равна отношению длины проекции к промежутку между минами, то есть $0.2/\cos\alpha$. Из формулы видно, что лучше всего проходить минное поле перпендикулярно линии заграждения. В этом случае вероятность подрыва корабля минимальна и равна 0.2.

4. Задача может быть решена с помощью плоской картинки, аналогичной приведенной в решении задачи 2, однако проще заметить, что величины x и y входят в условие задачи симметрично, так что вероятность того, что $|x| > |y|$ такая же, что и вероятность того, что $|x| < |y|$. Замечая, что совпадение величин x и y имеет нулевую вероятность, заключаем, что указанные вероятности равны 0.5.

5. По условию палка может быть разломана в любой своей точке. При этом получится, что длинный кусок палки не более чем в 2 раза длиннее короткого, тогда и только тогда, когда палка будет разломана где-то в пределах своей средней трети (разделить палку на три части и выбрать ту, которая находится посередине). По определению геометрической вероятности ответом будет отношение длины этой средней трети палки к длине всей палки, то есть $1/3$.

6. Нарисуем на плоскости систему координат и условимся откладывать на горизонтальной оси время прихода первого человека, а на вертикальной — время появления второго. Тогда можно считать, что результат случайного эксперимента в этой задаче о встрече — это точка в квадрате (см. рисунок), представляющем собой множество всех возможных исходов. Благоприятные исходы эксперимента описываются точками, координаты которых отличаются менее, чем на $1/6$ (10 минут $= 1/6$ часа). На рисунке это множество точек, образующих заштрихованную полосу. Площадь всего квадрата равна 1, а площадь полосы проще всего найти как дополнение к площади двух незаштрихованных треугольников, которые, будучи приложены друг к другу, образуют квадрат со стороной $5/6$. Таким образом, искомая вероятность равна $\dfrac{1-(5/6)^2}{1} = \dfrac{11}{36}$.





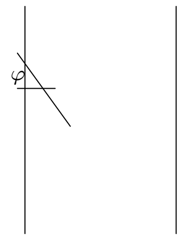
7. Нарисуем на плоскости систему координат и условимся откладывать на горизонтальной оси длину первого катета треугольника, а на вертикальной — длину второго катета. Тогда можно считать, что результат случайного эксперимента в этой задаче — это точка в квадрате (см. рисунок), представляющем собой множество всех возможных исходов. Длина гипотенузы вычисляется по теореме Пифагора. Так как эта длина должна быть меньше 1, то множество всех благоприятных исходов образуют точки, удаленные от начала координат на расстояние, которое меньше 1. Графическое изображение таких точек — четверть круга единичного радиуса. По определению геометрической вероятности ответом задачи будет отношение площади этой четверти круга ($S = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2$) к площади всего квадрата ($S_{\text{КВ}} = 1$), то есть $\pi/4 \approx 0.7854$.

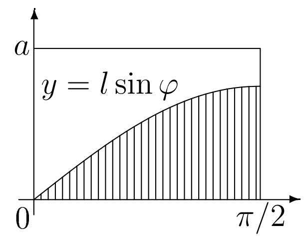
8. Предположим, что автобусы ходят по такому расписанию: после автобуса, едущего в сторону математического кружка, через 5 минут идет автобус, везущий в физический кружок, а через 10 минут снова идет автобус в сторону математического кружка. Если Вася приходит на остановку в случайный момент времени, то он с вероятностью 1/3 попадет в пятиминутный промежуток времени и с вероятностью 2/3 — в десятиминутный. Таким образом и может случиться ситуация, описанная в задаче.

9. Из соображений симметрии понятно, что достаточно рассмотреть лишь промежуток между какими-нибудь двумя прямыми. Положение иглы вдоль вертикали не играет никакой роли, так как ее сдвиг вверх или вниз не влияет на пересечение соответствующей прямой.

Будем задавать положение иглы с помощью двух параметров: расстояния y от ее центра до ближайшей прямой и угла φ, который образует игла с прямыми, нарисованными на плоскости. Ясно, что $0 \leq y \leq a$ и $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Разумно считать, что положение центра и угол не зависят друг от друга, поэтому исход случайного эксперимента можно интерпретировать как точку, выбранную наудачу в прямоугольнике с размерами a на $\pi/2$. С помощью формул тригонометрии находим, что игла пересекает линию в том и только том случае, когда $l \sin\varphi < y$. Множество благоприятных исходов в этом случае расположено под графиком функции $y = l \sin\varphi$. Множество всех исходов образует прямоугольник с площадью $\pi a/2$. В курсе математического анализа с помощью применения аппарата интегрального исчисления доказывается, что площадь множества благоприятных исходов равна l. Поэтому вероятность, которую требуется определить в задаче, равна $\frac{2l}{\pi a}$.

Оказывается, что, опираясь на полученный результат, с помощью некоторой процедуры можно вычислять приближенное значение числа π. Предположим, что после n бросаний игла пересекла линии m раз. Если n достаточно велико, то дробь m/n может служить некоторой оценкой для вероятности случайного события, рассмотренного в задаче. Исходя из формулы, находим, что для числа π можно выписать оценку $\pi \approx \frac{2ln}{am}$. Выберите сами иглу, замерьте ее длину l, нарисуйте на листе бумаги па-





раллельные линии на расстоянии $a > l$ и проведите несколько опытов, определив m и n. Вычислите приближенное значение π по указанной формуле. Попробуйте написать программу для компьютера, реализующую подобный случайный эксперимент.

Метод вычисления некоторых величин, использующий вероятностный подход, аналогичный описанному выше, носит название метода Монте-Карло и применяется в тех случаях, когда прямые вычисления затруднительны, а моделирование случайных экспериментов вполне приемлемо. Существенным недостатком метода Монте-Карло является его медленная сходимость к ответу. Нередко для того, чтобы получить один дополнительный десятичный знак ответа, приходится существенно увеличивать (на порядки) количество проводимых случайных экспериментов.

Задачи §5.

1. Случайным экспериментом в этой задаче является подбрасывание монеты, а успехом считается выпадение герба. Ясно, что $p = q = 1/2$, а $n = 50$. По формуле Бернулли находим, что вероятность выпадения 25 гербов составляет

$$P_{50}(25) = C_{50}^{25} p^{25} q^{25} = \frac{50!}{(25!)^2} \cdot \frac{1}{2^{50}} \approx 0.112,$$

то есть чуть больше, чем 11%. Совпал ли этот результат с тем, что предсказывала ваша интуиция?

2. Случайным экспериментом в этой задаче является поездка в транспорте, поэтому $n = 6$. Считаем поездку успешной, если Иван не повстречался с контролером, так что $p = 0.8$, $q = 0.2$. Вероятность того, что Ивана ни разу не оштрафуют — это число $P_6(6)$, которое находится по формуле Бернулли и равно 0.262144. По той же формуле Бернулли определяем, что вероятность однократного штрафа составляет 0.393216. Для ответа на последний вопрос задачи найдем вероятность противоположного события, состоящего в том, что Ивана оштрафовали менее двух раз, и вычтем ее из единицы. Данные для таких вычислений уже есть, поэтому записываем: $1 - P_6(6) - P_5(5) = 0.34464$. Ответы: 0.262, 0.393, 0.345.

3. Эту задачу проще всего решить перебором. Предположим, что членов жюри будет $n = 7$. Тогда, по формуле Бернулли, находим вероятность правильного решения, принимаемого большинством голосов:

$$P_7(4) + P_7(5) + P_7(6) + P_7(7) \approx 0.874,$$

что еще меньше, чем 0.9. Предполагая, что $n = 9$, находим аналогичную вероятность, которая теперь составляет

$$P_9(5) + P_9(6) + P_9(7) + P_9(8) + P_9(9) \approx 0.901,$$

что уже больше, чем 0.9. Ответ: в жюри должно быть 9 человек.

4. Как уже было подсчитано ранее (см. задачу о лотерее “5 из 36” в §2), вероятность угадать все 5 номеров $p = \dfrac{1}{376\,992}$. С помощью компьютера или калькулятора вычисляем по формуле Бернулли ответ задачи:

$$\begin{gathered}
P_{1\,500\,000}(2) + P_{1\,500\,000}(3) + P_{1\,500\,000}(4) + P_{1\,500\,000}(5) = \\
= C^2_{1\,500\,000}p^2(1-p)^{1\,499\,998} + C^3_{1\,500\,000}p^3(1-p)^{1\,499\,997} + \\
+ C^4_{1\,500\,000}p^4(1-p)^{1\,499\,996} + C^5_{1\,500\,000}p^5(1-p)^{1\,499\,995} \approx \\
\approx 0.695.
\end{gathered}$$

5. Здесь формула Бернулли применяется для $p = 1/6$, $q = 5/6$. Найдем шансы на успех у первого человека. Вероятность того, что он не получит шестерки в шести бросаниях, равна $P_6(0)$, так что вероятность его успеха равна

$$1 - P_6(0) = 1 - (5/6)^6 \approx 0.665.$$

Второй человек проиграет тогда и только тогда, когда при двенадцати бросаниях шестерка выпадет один раз или не выпадет вовсе, поэтому шансы на успех для второго человека таковы:

$$1 - P_{12}(0) - P_{12}(1) = 1 - (5/6)^{12} - 12 \cdot 1/6 \cdot (5/6)^{11} \approx 0.619.$$

Аналогично находим шансы на выигрыш для третьего игрока:

$$1 - P_{18}(0) - P_{18}(1) - P_{18}(2) \approx 0.597.$$

Из полученных результатов видно, что шансы на успех уменьшаются.

Задачи §6.

1. Определим два случайных события:

$$\begin{aligned} B &= \{\text{в семье есть мальчик}\}, \\ A &= \{\text{число мальчиков больше числа девочек}\}. \end{aligned}$$

Нетрудно подсчитать, что $\mathbb{P}(B) = 7/8$, $\mathbb{P}(AB) = 4/8$, поэтому $\mathbb{P}(A|B) = 4/7 > 1/2$, а значит если спрашивать у мальчика (реализовалось условие B), кого в семье больше — братьев или сестер, то он с вероятностью $4/7$ (событие A) ответит, что братьев. Рассуждения о девочках полностью аналогичны.

2. Определим два случайных события:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{бродяга в 8-м баре}\}, \\ B &= \{\text{бродяги нет в 1–7 барах}\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}\{\text{бродяга в одном из 1–7 баров}\} = \\ = 1 - 7 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{10}.$$

Кроме того,

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{10},$$

так что $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{1/10}{3/10} = 1/3$. Ответ: $1/3$.

3. Определим два случайных события:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{завтра будет хорошая погода}\}, \\ B &= \{\text{сегодня хорошая погода}\}. \end{aligned}$$

По условию задачи известно, что

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{B}) = 1/4, \quad \mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) = 2/3,$$

а требуется определить $\mathbb{P}(A|B)$. Это можно сделать так:

$$\mathbb{P}(AB) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) - \mathbb{P}(\overline{B}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cdot \overline{B}) =$$

$$= 1 - 1/4 - 1/4 + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(\overline{A}\,|\overline{B}) = 1/2 + 1/4 \cdot 2/3 = 2/3,$$

поэтому $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(AB)/\mathbb{P}(B) = 2/3 : 3/4 = 8/9$.

Задачи §7.

1. Пусть гипотеза H_1 состоит в том, что выбрана снайперская винтовка, гипотеза H_2 — в том, что винтовка обычная, а событие A означает попадание из винтовки. По условию задачи известно, что $\mathbb{P}(H_1) = 0.6$, $\mathbb{P}(H_2) = 0.4$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 0.95$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 0.7$. По ФПВ находим:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2) =$$

$$= 0.6 \cdot 0.95 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.85.$$

2. Введем две гипотезы: H_1, состоящую в том, что синоптик дает достоверный прогноз, и H_2, означающую, что синоптик дает недостоверный прогноз. Известно, что $\mathbb{P}(H_1) = 0.8$, $\mathbb{P}(H_2) = 0.2$. Пусть случайное событие A означает, что будет дождь. Если синоптик прав, то вероятность дождя равна 0.9, так что $\mathbb{P}(A|H_1) = 0.9$. Если синоптик ошибается, то разумнее полагаться не на него, а на данные многолетних наблюдений, поэтому $\mathbb{P}(A|H_2) = 0.2$. По ФПВ находим:

$$\mathbb{P}(A) = 0.8 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.76.$$

3. Введем гипотезы H_1, H_2, H_3, означающие, что Иванушка-дурачок пошел налево, направо или прямо. Из условия задачи следует, что вероятности осуществления каждого из этих случайных событий равны $1/3$. Пусть A — случайное событие, состоящее в том, что Иванушка-дурачок нашел свое счастье. Тогда

$$\mathbb{P}(A|H_1) = 0, \quad \mathbb{P}(A|H_2) = 1, \quad \mathbb{P}(A|H_3) = 2/3.$$

По ФПВ теперь легко подсчитать ответ:

$$\mathbb{P}(A) = 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 2/3 = 5/9.$$

4. Исходя из данных задачи легко подсчитать вероятности сдать экзамен на 5, 4, 3, 2, если Вовочка пойдет на экзамен со шпаргалкой:

$$\begin{aligned} p_5 &= 0.5 \cdot (0.2 + 0.4) + 0.2 \cdot 0.2 = 0.34; \\ p_4 &= 0.5 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.4 = 0.23; \\ p_3 &= 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.11; \\ p_2 &= 0.3 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.32. \end{aligned}$$

Так как вероятность сдать не меньше чем на четверку со шпаргалкой равна $0.34 + 0.23 = 0.57$, что меньше первоначальной вероятности $0.2 + 0.4 = 0.6$, то Вовочке не стоит применять шпаргалку.

Кроме того, можно заметить, что применение шпаргалки увеличивает вероятности сдать экзамен на 5 и на 2, уменьшая все остальные вероятности. Поэтому можно сделать вывод о том, что применение шпаргалки сдвигает ситуацию на экзамене к положению "либо пан — либо пропал". Сделайте правильные выводы из этой задачи!

5. Пусть H_i, $0 \leq i \leq 3$, — события, означающие, что в корабль попало i торпед, A — событие, состоящее в потоплении корабля. Вероятности гипотез H_i можно определить по формуле Бернулли, полагая в ней $n = 3$, $p = 0.2$, $q = 0.8$:

$$\mathbb{P}(H_0) = C_3^0 \cdot (0.2)^0 \cdot (0.8)^3 = 0.512,$$

$$\mathbb{P}(H_1) = C_3^1 \cdot (0.2)^1 \cdot (0.8)^2 = 0.384,$$
$$\mathbb{P}(H_2) = C_3^2 \cdot (0.2)^2 \cdot (0.8)^1 = 0.096,$$
$$\mathbb{P}(H_3) = C_3^3 \cdot (0.2)^3 \cdot (0.8)^0 = 0.008.$$

Ясно, что $\mathbb{P}(A|H_0) = \mathbb{P}(A|H_1) = 0$, так как при промахе или попадании всего лишь одной торпеды корабль не тонет.

Вычислим $\mathbb{P}(A|H_2)$. Корабль будет потоплен, если и только если вторая торпеда попадет не в тот отсек, куда попала первая, поэтому $\mathbb{P}(A|H_2) = 3/4$.

Для определения $\mathbb{P}(A|H_3)$ заметим, что корабль не будет потоплен, если и только если вторая и третья торпеды попадут в тот же отсек, что и первая. Отсюда находим, что $\mathbb{P}(A|H_3) = 1 - (1/4)^2 = 15/16$.

Наконец, по ФПВ вычисляем ответ задачи:

$$\mathbb{P}(A) = 0.096 \cdot 3/4 + 0.008 \cdot 15/16 = 0.0795.$$

6. Пусть H_1 означает, что Знайкина говорит правду, а H_2 означает, что Знайкина обманывает, A — событие, состоит в том, что запятая поставлена верно. Из условия задачи следует, что

$$\mathbb{P}(H_1) = 3/4, \quad \mathbb{P}(H_2) = 1/4,$$

$$\mathbb{P}(A|H_1) = 3/4, \quad \mathbb{P}(A|H_2) = 1/4.$$

По ФПВ находим:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8} > \frac{1}{2},$$

так что Лейкину лучше послушаться совета Знайкиной.

7. Пусть A — случайное событие, означающее, что Петров не нашел Васечкина. Введем гипотезы

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{Васечкин на пляже}\}, \\ H_2 &= \{\text{Васечкин на теннисном корте}\}, \\ H_3 &= \{\text{Васечкин в кафе-мороженом}\}. \end{aligned}$$

Тогда из условий задачи следует, что

$$\mathbb{P}(H_1) = 1/2, \quad \mathbb{P}(H_2) = 1/4, \quad \mathbb{P}(H_3) = 1/4,$$

$$\mathbb{P}(A|H_1) = 1/2, \quad \mathbb{P}(A|H_2) = 1/3, \quad \mathbb{P}(A|H_3) = 0.$$

В задаче требуется определить $\mathbb{P}(H_1|A)$. Для этого применим формулу Байеса:

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1)}{\mathbb{P}(A)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1)}{\mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2) \cdot \mathbb{P}(A|H_2) + \mathbb{P}(H_3) \cdot \mathbb{P}(A|H_3)} =$$

$$= \frac{1/2 \cdot 1/2}{1/2 \cdot 1/2 + 1/4 \cdot 1/3 + 1/4 \cdot 0} = \frac{3}{4}.$$

8. Введем гипотезы H_1, H_2, H_3, означающие, что рыбак удил на реке, на озере и на болоте соответственно. По условию задачи

$$\mathbb{P}(H_2) = 2\mathbb{P}(H_1), \quad \mathbb{P}(H_2) = 3\mathbb{P}(H_3),$$

$$\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(H_3) = 1,$$

откуда находим $\mathbb{P}(H_1) = 3/11$, $\mathbb{P}(H_2) = 6/11$, $\mathbb{P}(H_3) = 2/11$.

Пусть A — случайное событие, означающее, что при трехкратном забрасывании удочки рыба клюнет один раз. По формуле Бернулли находим условные вероятности:

$$\mathbb{P}(A|H_1) = C_3^1 \cdot (0.4)^1 \cdot (0.6)^2 = 0.432,$$

$$\mathbb{P}(A|H_2) = C_3^1 \cdot (0.3)^1 \cdot (0.7)^2 = 0.441,$$
$$\mathbb{P}(A|H_3) = 0.$$

Вычисляем по ФПВ:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{11} \cdot 0.432 + \frac{6}{11} \cdot 0.441 + \frac{2}{11} \cdot 0,$$

и пользуемся формулой Байеса:

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\frac{6}{11} \cdot 0.441}{\frac{3}{11} \cdot 0.432 + \frac{6}{11} \cdot 0.441} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{0.432}{0.441} + 1} \approx 0.671.$$

Ответ: ≈ 0.671.

9. Пусть случайное событие A означает, что наудачу вызванный студент ответил на два из трех поставленных вопросов. Введем гипотезы

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{\text{студент отлично подготовлен}\},\\
H_2 &= \{\text{студент хорошо подготовлен}\},\\
H_3 &= \{\text{студент подготовлен удовлетворительно}\},\\
H_4 &= \{\text{студент подготовлен плохо}\}.
\end{aligned}$$

Исходя из состава группы, описанной в задаче, заключаем, что в ней 10 человек, так что

$$\mathbb{P}(H_1) = 0.3, \quad \mathbb{P}(H_2) = 0.4, \quad \mathbb{P}(H_3) = 0.2, \quad \mathbb{P}(H_4) = 0.1.$$

Всего имеется $C_{20}^3 = 1140$ способов составить билет, в который входят три вопроса. Теперь вычислим условные вероятности события A при условии этих гипотез. Отличник знает все вопросы, поэтому $\mathbb{P}(A|H_1) = 0$. Хорошо подготовленный студент ответит так, как это описано в событии A, в $C_{16}^2 \cdot C_4^1 = 480$ случаях, так что

$$\mathbb{P}(A|H_2) = \frac{480}{1140} = \frac{16}{38}.$$

Аналогично находим

$$\mathbb{P}(A|H_3) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{10}^1}{C_{20}^3} = \frac{15}{38}, \quad \mathbb{P}(A|H_4) = \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{5}{38}.$$

Вычислим по ФПВ безусловную вероятность события A:

$$\mathbb{P}(A) = 0.3 \cdot 0 + 0.4 \cdot \frac{16}{38} + 0.2 \cdot \frac{15}{38} + 0.1 \cdot \frac{5}{38} = \frac{99}{380}.$$

Для решения задачи осталось применить формулу Байеса:

$$\mathbb{P}(H_4|A) = \frac{\mathbb{P}(H_4)\mathbb{P}(A|H_4)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.1 \cdot 5/38}{99/380} = \frac{5}{99}.$$

Ответ: $5/99$.

10. Пусть событие D означает, что две пули из трех попали в мишень, а гипотезами служат взаимно противоположные события

$$\begin{aligned} H_1 &= \{C \text{ попал в мишень}\}, \\ H_2 &= \{C \text{ промахнулся}\}. \end{aligned}$$

По условию задачи $\mathbb{P}(H_1) = 2/5$, $\mathbb{P}(H_2) = 3/5$. Найдем условные вероятности $\mathbb{P}(D|H_1)$ и $\mathbb{P}(D|H_2)$. Если C попал в мишень, то значит событие D выполняется тогда и только тогда, когда в мишень попадает только один из стрелков A и B. Таким образом,

$$\mathbb{P}(D|H_1) = \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{10}.$$

Если C не попал в мишень, то событие D выполняется тогда и только тогда, когда в мишень попадают оба стрелка A и B, поэтому

$$\mathbb{P}(D|H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

По формуле Байеса находим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_1|D) &= \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(D|H_1)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(D|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(D|H_2)} = \\ &= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{10}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10}} = \frac{10}{19}, \\ \mathbb{P}(H_2|D) &= \frac{\mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(D|H_2)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(D|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(D|H_2)} = \\ &= \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10}} = \frac{9}{19}, \end{aligned}$$

так что попадание C в мишень вероятнее, чем промах.

Задачи §8.

1. Пусть

$$\begin{aligned} A &= \{\text{на первом светофоре зеленый свет}\}, \\ B &= \{\text{на втором светофоре зеленый свет}\}. \end{aligned}$$

По условию задачи известно, что

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 2/3, \quad \mathbb{P}(B|A) = 3/4,$$

а требуется определить $\mathbb{P}(\overline{B}|\overline{A})$. Это можно сделать так:

$$\mathbb{P}(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A}\cdot\overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\mathbb{P}(\overline{A\cup B})}{\mathbb{P}(\overline{A})} =$$

$$= \frac{1 - P(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(AB)}{1 - \mathbb{P}(A)} =$$

$$= \frac{1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B|A)}{1 - \mathbb{P}(A)} = \frac{1}{2}.$$

2. Выбор трех стюардесс можно осуществить C_{20}^3 способами (1140 вариантов). Выбор будет удовлетворять условию, если окажутся выбранными две блондинки и одна брюнетка ($C_7^2 \cdot C_{13}^1 = 273$ способа) или, наоборот, одна блондинка и две брюнетки ($C_7^1 \cdot C_{13}^2 = 546$ способов), так что искомая вероятность составляет $\dfrac{273+546}{1140}$, что приближенно равно 0.718.

3. Пусть N — число семей. В них N девочек. В $N/2$ семьях мальчиков нет, в $N/4$ семьях — по одному мальчику, в $N/8$ — по два, ... , в $N/2^n$ семьях по $n-1$ мальчику. Итого,

$$\frac{N}{4}\cdot 1 + \frac{N}{8}\cdot 2 + \ldots + \frac{N}{2^n}\cdot(n-1) + \ldots =$$

$$= \frac{N}{4}\cdot\left[1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{n-1}{2^n} + \ldots\right] = N,$$

то есть число мальчиков равно числу девочек (в идеальном предположении, что ряд, записанный в скобках, бесконечен; кстати, как вы считали его сумму?)[8].

[8] Один из способов состоит в том, чтобы посчитать бесконечную сумму чисел, являющихся, в свою очередь, суммами бесконечных геометрических прогрессий.

4. Два раза из трех муж вступает в пререкания со своей тещей, и один раз из трех $(1/2 \cdot 2/3 = 1/3)$ это приводит к семейной ссоре. Два раз из трех жена вступает в пререкания со своей свекровью, и один раз из трех это приводит к семейной ссоре.

Доля воскресений, в которые семейная ссора возникает дважды — и из-за пререканий мужа с тещей, и из-за пререканий жены со свекровью — равна $1/3 \cdot 1/3 = 1/9$, поскольку эти пререкания независимы друг от друга. Поэтому доля воскресений, когда ссора между супругами возникает хотя бы по одному поводу, равна

$$1/3 + 1/3 - 1/9 = 5/9.$$

Следовательно, доля воскресений, которые обходятся без таких семейных ссор, равна всего лишь

$$1 - 5/9 = 4/9.$$

5. Пусть p_n — вероятность того, что отправляясь на работу в n-й раз, Иван Петрович едет на машине. Тогда, исходя из условий задачи, можно составить рекуррентную формулу:

$$p_n = \frac{1}{2} \cdot p_{n-1} + \frac{1}{4} \cdot (1 - p_{n-1}) = \frac{1}{4} \cdot (p_{n-1} + 1),$$

откуда, применяя формулу для p_{n-1}, p_{n-2} и т. д., определяем

$$p_n = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^{n-2}}\right) + \frac{p_1}{4^{n-1}} \approx \frac{1}{3}$$

при больших n. Поэтому вероятность опоздания, которую теперь можно найти по ФПВ, равна

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

6. Пусть событие H_i, $i = 1, 2$, состоит в том, что наудачу выбранный спортсмен — член i-й команды. Тогда вероятности событий H_i равны соответственно $\mathbb{P}(H_1) = 3/5$, $\mathbb{P}(H_2) = 2/5$. Пусть событие A состоит в том, что наудачу выбранный спортсмен — мастер спорта. Тогда условные вероятности события A при условии, что выполнено событие H_i (то есть известно, из какой команды спортсмен), равны соответственно $\mathbb{P}(A|H_1) = 3/5$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 2/5$. Используя ФПВ, получаем

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{25}.$$

Задачи §9.

1. а) Если зеленые яблоки выбрасываются, то случайная величина X, равная числу вынутых яблок может принимать значения 1, 2, 3, 4. Наименьшее значение принимается в том случае, если первое вытянутое яблоко сразу же оказалось красным. Максимальное значение принимается в том случае, когда сначала были вынуты все зеленые яблоки, а потом только попалось красное.

По классической схеме вероятности находим

$$\mathbb{P}\{X = 1\} = 2/5 = 0.4.$$

Далее, чтобы X равнялось 2, нужно сначала вынуть зеленое яблоко (это происходит с вероятностью $3/5$), а затем из четырех оставшихся яблок извлечь красное (это происходит с вероятностью $1/2$), так что

$$\mathbb{P}\{X = 2\} = 3/5 \cdot 1/2 = 0.3.$$

Аналогично находим вероятности $\mathbb{P}\{X = 3\}$ и $\mathbb{P}\{X = 4\}$:

$$\mathbb{P}\{X = 3\} = 3/5 \cdot 2/4 \cdot 2/3 = 0.2,$$

$$\mathbb{P}\{X = 4\} = 3/5 \cdot 2/4 \cdot 1/3 \cdot 2/2 = 0.1.$$

Теперь можно выписать распределение случайной величины X:

1	2	3	4
0.4	0.3	0.2	0.1

Найдем среднее число вынутых яблок:

$$\mathbb{M}X = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 = 2.$$

б) Случай, когда зеленые яблоки возвращаются на место, сложнее. Ясно, что случайная величина X может принимать сколь угодно большие натуральные значения. Случайная величина X равна натуральному k в том и только в том случае, когда сначала было вынуто $k-1$ зеленое яблоко, а потом — красное. Вынуть зеленое яблоко мы можем с вероятностью $3/5$, которая никак не изменяется в зависимости от числа вынутых яблок, а красное — с вероятностью $2/5$, поэтому, считая попытки при выборе яблок независимыми, находим, что $\mathbb{P}\{X = k\} = \dfrac{2}{5} \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^{k-1}$.
Таким образом, распределение случайной величины имеет *счетное* число значений:

1	2	3	4	...
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$	$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3$	...

Найдем среднее число вынутых яблок. Для этого придется бесконечное число раз воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии:

$$\mathbb{M}X = 1\cdot\frac{2}{5} + 2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} + 3\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \ldots =$$

$$= \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \ldots\right) +$$

$$+\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \ldots\right) +$$

$$+\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \ldots\right) + \ldots =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}} + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}.$$

Можно заметить, что среднее число вынутых яблок — это величина, обратная вероятности вытянуть красное яблоко. Докажите, что это не простое совпадение, изучив проведенное рассуждение.

2. Задача про баскетболиста Колю решается аналогично случаю б) предыдущей задачи. В самом деле, количество бросков X до первого попадания имеет распределение

1	2	3	4	...
0.2	$0.2\cdot 0.8$	$0.2\cdot(0.8)^2$	$0.2\cdot(0.8)^3$	...

Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче, находим, что $\mathbb{M}X = 5$.

3. Случайная величина X, равная количеству пройденных без остановки светофоров, может принимать все целые значения от 0 до 6 включительно. Считая успехом прохождение светофора без остановки, определяем вероятности, определяющие распределение, по формуле Бернулли:

0	1	2	3	4	5	6
$\frac{64}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{160}{729}$	$\frac{20}{243}$	$\frac{4}{243}$	$\frac{1}{729}$

Среднее число пройденных без остановки светофоров

$$\mathbb{M}X = 0 \cdot \frac{64}{729} + 1 \cdot \frac{64}{243} + 2 \cdot \frac{80}{243} + 3 \cdot \frac{160}{729} +$$

$$+4 \cdot \frac{20}{243} + 5 \cdot \frac{4}{243} + +6 \cdot \frac{1}{729} = 2.$$

4. Число попаданий X может принимать значения 0, 1, 2, 3. Все стрелки могут промахнуться с вероятностью

$$0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.9 = 0.09,$$

все стрелки могут попасть в мишень с вероятностью

$$0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.1 = 0.04.$$

Только один стрелок попадает в мишень с вероятностью

$$0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.1 = 0.46.$$

Только один стрелок промахивается с вероятностью

$$0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.1 + 0.2\dot{0}.5 \cdot 0.1 = 0.41.$$

Полученные значения позволяют выписать распределение X

0	1	2	3
0.09	0.46	0.41	0.04

Среднее число попаданий в мишень легко подсчитывается:

$$\mathbb{M}X = 0 \cdot 0.09 + 1 \cdot 0.46 + 2 \cdot 0.41 + 3 \cdot 0.04 = 1.4$$

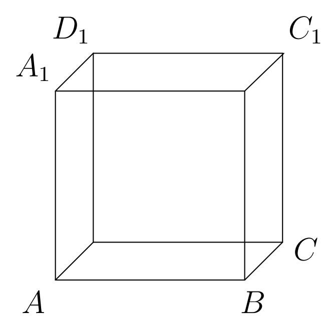
5. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, по которому ползает муха. Будем считать, что муха в начальный момент времени находится в вершине A, а паук — в вершине C_1. Обозначим среднее время жизни мухи, которая начинает ползти из вершины A через x, среднее время жизни мухи, которая начинает ползти из вершин A_1, B, или D через y (так как эти вершины расположены симметрично относительно паука, то и время одинаково для любой из перечисленных вершин), и, наконец, среднее время жизни мухи, которая начинает ползти из вершин C, B_1, D_1 через z.

Составим три уравнения, связывающие x, y, z.

Из вершины A муха всегда попадает в одну из вершин, где среднее время жизни равно y. Это происходит за один ход, так что $x = y + 1$.

Из вершины B за один ход (рассуждения для симметричных вершин приводят к такому же уравнению) муха с вероятностью $1/3$ может попасть в вершину A со средним временем жизни x, и с вероятностью $2/3$ в вершины B_1 и C, со средними временами жизни z, соответственно. Используя ФПВ, заключаем, что

$$y = 1/3 \cdot (x + 1) + 2/3 \cdot (z + 1).$$



Из вершины C за один ход муха с вероятностью $1/3$ попадает к пауку, так что время жизни может быть равно 1, и с вероятностью $2/3$ переходит в вершины со средним временем жизни y, поэтому, снова применив ФПВ, находим, что

$$z = 1/3 \cdot 1 + 2/3 \cdot (y + 1).$$

Решая полученную систему уравнений, определяем, что $x = 10$, $y = 9$, $z = 7$.

Нам требуется узнать только значение x. Итак, муха проживет в среднем 10 единиц времени.

Задачи §10.

Парадокс второго туза. Сначала вычислим P. Общее число исходов, при которых у Вас на руках есть туз, равно $C_{52}^{13} - C_{48}^{13}$ (из общего числа исходов вычитаем те исходы, когда тузов нет). Благоприятных исходов, когда у Вас на руках есть как минимум два туза, имеется

$$C_4^2 \cdot C_{48}^{11} + C_4^3 \cdot C_{48}^{10} + C_4^4 \cdot C_{48}^9$$

(выбираем из четырех тузов два, три или четыре, а остальные карты вытягиваем из оставшихся 48 карт). Вычисляем первую вероятность

$$P = \frac{C_4^2 \cdot C_{48}^{11} + C_4^3 \cdot C_{48}^{10} + C_4^4 \cdot C_{48}^9}{C_{52}^{13} - C_{48}^{13}} = \frac{5359}{14\,498} \approx 0.37 < \frac{1}{2}.$$

Теперь определим Q. Общее число исходов, при которых на руках есть туз пик, равно C_{51}^{12} (одна карта — это туз пик, а остальные 12 карт выбираем произвольно из оставшейся 51 карты). Число благоприятных исходов, когда на руках есть как минимум еще один туз, составляет

$$C_3^1 \cdot C_{48}^{11} + C_3^2 \cdot C_{48}^{10} + C_3^3 \cdot C_{48}^{9}$$

(выбираем из трех оставшихся тузов одного, двух или трех, а остальные карты извлекаем из оставшихся 48 карт колоды). Величина второй вероятности

$$Q = \frac{C_3^1 \cdot C_{48}^{11} + C_3^2 \cdot C_{48}^{10} + C_3^3 \cdot C_{48}^{9}}{C_{51}^{12}} = \frac{11\,686}{20\,825} \approx 0.56 > \frac{1}{2}.$$

Теперь видно, что $P < 1/2 < Q$.

Парадокс второго ребенка. В первом случае существует три равновероятных возможности: ММ, МД, ДМ (по крайней мере один из детей является мальчиком). Во втором случае допустимые комбинации исчерпываются двумя: ММ и МД. Парадокс с монетой объясняется точно так же как и предыдущий после замены “мальчика” на “орла”, а “девочки” — на “решку”.

Игра в совпадения. Занумеруем карты первой колоды натуральными числами от 1 до n (в рассматриваемой задаче $n = 52$). Задача равносильна определению вероятности того, что при случайной расстановке n чисел ни одно из них не попало на место со своим номером. Общее количество вариантов произвольной расстановки чисел равно $n!$, количество вариантов расстановки, при которых ни одно из чисел не попало на место со своим номером, составляет

$$n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! - C_n^3 \cdot (n-3)! + \ldots .$$

Это обстоятельство можно пояснить так: из общего числа расстановок ($n!$) вычтем те ($C_n^1 \cdot (n-1)!$), при которых одно из чисел попадает на место со своим номером; при этом варианты, когда два числа попадают на места со своими номерами, были учтены дважды, так что количество таких вариантов надо прибавить ($C_n^2 \cdot (n-2)!$); однако при этом варианты, когда три числа попадают на места со своими номерами, были учтены дважды, поэтому их нужно вычесть и т. д. Эти рассуждения напоминают доказательство формулы включений и исключений.

Искомая вероятность равна отношению

$$\frac{n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! - C_n^3 \cdot (n-3)! + \ldots}{n!} =$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$$

Эта знакопеременная сумма достаточно быстро сходится к числу 0.367... Таким образом, шансы на выигрыш в пари на совпадение практически не зависят от количества карт в колоде и примерно равны 2/3.

Парадокс тюремного надзирателя. Ответ в этой задаче: вероятность того, что помилован A, равна 1/3, вероятность того, что помилован C, — 2/3.

Независимо от того, кто помилован в действительности, надзиратель сообщает A, что казнить собираются другого заключенного, поэтому, что бы ни сказал надзиратель заключенному A, вероятность остаться в живых для того по-прежнему остается равной 1/3.

А как обстоят дела у C? Либо A, либо C должен быть казнен. Их вероятности выжить в сумме должны составлять 1. Шансы выжить у A равны 1/3, значит C не будет казнен с вероятностью 2/3. Это подтверждается рассмотрением четырех возможных элементов в пространстве элементарных событий и их начальных вероятностей.

1. Помилован C, назван B (вероятность 1/3).
2. Помилован B, назван C (вероятность 1/3).
3. Помилован A, назван B (вероятность 1/6).
4. Помилован A, назван C (вероятность 1/6).

Узник A остается в живых в случаях 3 и 4; следовательно, вероятность счастливого исхода для A равна 1/3. Известие о том, что казни подлежит B отвечает случаям 1 и 3. При этом случай 1 (вероятность 1/3) встречается вдвое чаще, чем случай 3 (вероятность 1/6). Следовательно, вероятность того, что помилован C, относится к вероятности помилования A как 2 к 1, то есть равна 2/3.

Задача о трех заключенных иногда вызывает очень ярко выраженную эмоциональную реакцию. Вот, например, один из таких вариантов, адресованный автору журнальной статьи, где однажды был опубликован этот парадокс:

"Мы обращаемся к вам от имени надзирателя, который, являясь должностным лицом, не хотел бы быть замешанным в обсуждении спорных вопросов.

Вы порочите его репутацию, заявляя, будто надзиратель ничего не знал о теории вероятностей. Мы считаем, что подобное утверждение является величайшей несправедливостью. Вы заблуждаетесь, может быть, и злостно клевещете. Со своей стороны мы хотим заверить вас, что математика вообще и теория вероятностей в частности в течение вот уже многих лет являются его излюбленнейшим занятием. То, что он, руководствуясь гуманным намерением облегчить последние часы осужденного человека (ибо, как известно теперь, помилован был C), ответил на вопрос A, ничуть не противоречит инструкциям, полученным им от губернатора.

Единственное, в чем его действительно можно упрекнуть (и за это он уже получил выговор от губернатора), так это за то, что он не сумел воспрепятствовать установлению связи между A и C и тем самым не помешал C более точно оценить вероятность остаться в живых. Но и этот промах тюремщика не повлек за собой тяжелых последствий, поскольку C не сумел должным образом воспользоваться полученной информацией.

Если вы публично не отречетесь от своих слов, то мы будем вынуждены прекратить подписку на ваш журнал."

Задачи §13.

1. Пусть случайная величина $X = X(n)$ означает величину прибыли, которую получит продавец газет, если купит n изданий. Исходя из разумных соображений, закупку газет будем организовывать так, чтобы среднее значение ежедневной прибыли было максимальным.

Найдем распределение и среднее значение прибыли в зависимости от n, используя данные задачи. Понятно, что если $n = 0$, то и $\mathbb{M}X(0) = 0$. При $n = 10$ мы либо имеем убыток в \$0.3 в расчете на одну газету с вероятностью 0.03, когда величина спроса равна нулю, либо прибыль в \$0.5 (также в расчете на одну газету), при спросе не менее 10 изданий. Таким образом, распределение величины суммарной прибыли $X(10)$ имеет вид:

-3	5
0.03	0.97

По указанному распределению находим, что

$$\mathbb{M}X(10) = (-3) \cdot 0.03 + 5 \cdot 0.97 = 4.76.$$

Если $n = 20$, то мы можем иметь убыток в \$0.3 в расчете на одну газету при нулевой величине спроса (вероятность 0.03), можем иметь прибыль от продажи 10 газет по \$0.5 в расчете на одну газету и убыток в \$0.3 в расчете на каждую непроданную газету из оставшихся 10 газет при величине спроса в 10 газет (вероятность 0.17), а можем получить с каждой газеты прибыль по \$0.5, если величина спроса окажется не менее 20 изданий (вероятность 0.8). Записываем распределение и вычисляем математическое ожидание для $X(20)$:

-6	2	10
0.03	0.17	0.8

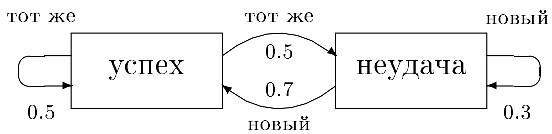
$$\mathbb{M}X(20) = (-6) \cdot 0.03 + 2 \cdot 0.17 + 10 \cdot 0.8 = 8.16.$$

Полученный ответ означает, что выгоднее закупать 20 изданий, нежели только 10. Продолжаем вычисления для $n = 30$, 40, 50, по указанной схеме:

$$\mathbb{M}X(30) = (-9) \cdot 0.03 + (-1) \cdot 0.17 + 7 \cdot 0.37 +$$
$$+ 15 \cdot 0.43 = 8.6,$$
$$\mathbb{M}X(40) = (-12) \cdot 0.03 + (-4) \cdot 0.17 + 4 \cdot 0.37 +$$
$$+ 12 \cdot 0.29 + 20 \cdot 0.14 = 6.72,$$
$$\mathbb{M}X(50) = (-15) \cdot 0.03 + (-7) \cdot 0.17 + 1 \cdot 0.37 +$$
$$+ 9 \cdot 0.29 + 17 \cdot 0.12 + 25 \cdot 0.02 = 3.88.$$

Из полученных данных сразу же вытекает, что выгоднее всего покупать 30 изданий, тогда в среднем мы будем иметь \$8.6 прибыли в день.

2. Схема работы видеопроката изображена на рисунке. Обозначим через $P_1(n)$ вероятность того, что видеопрокат работает успешно в n-ю неделю, а через $P_2(n)$ вероятность неудачного проката за тот же промежуток времени. Предположим, что $P_1(1) = 1$.



Ясно, что $P_1(2) = 0.5$, $P_2(2) = 0.5$. Значения вероятностей для третьей недели находим по формуле полной вероятности, гипотезы для которой выбираются очевидным образом (успех или неудача; их вероятности даны в условии задачи):

$$P_1(3) = 0.5 \cdot P_1(2) + 0.7 \cdot P_2(2) = 0.5 \cdot 0.5 + 0.7 \cdot 0.5 = 0.6,$$

$$P_2(3) = 0.5 \cdot P_1(2) + 0.3 \cdot P_2(2) = 0.5 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.4.$$

С использованием полученных данных тем же способом определяем нужные значения для четвертой недели и т. д.

$$P_1(4) = 0.5 \cdot P_1(3) + 0.7 \cdot P_2(3) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.7 \cdot 0.4 = 0.58,$$

$$P_2(4) = 0.5 \cdot P_1(3) + 0.3 \cdot P_2(3) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.42.$$

Теперь предположим, что $P_1(1) = 0$, и проведем аналогичные вычисления. В результате оказывается, что

$$P_1(2) = 0.700, \quad P_2(2) = 0.300,$$

$$P_1(3) = 0.560, \quad P_2(3) = 0.440,$$

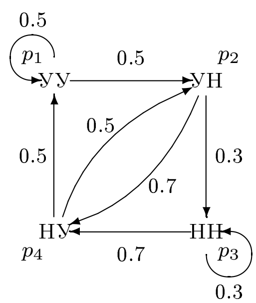
$$P_1(4) = 0.588, \quad P_2(4) = 0.412.$$

Если изобразить полученные данные графически, то может возникнуть предположение о том, что независимо от начального состояния видеопроката числовые последовательности $P_1(n)$ и $P_2(n)$ неограниченно приближаются к некоторым предельным значениям p_1 и p_2. Эти значения соответствуют тому случаю, когда прокат работает “бесконечно долго”, а потому должны удовлетворять системе уравнений, соответствующей алгоритму вычисления вероятностей:

$$\begin{cases} p_1 = 0.5p_1 + 0.7p_2, \\ p_2 = 0.5p_1 + 0.3p_2, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений будут числа $p_1 = 7/12$, $p_2 = 5/12$ (интересно, что первое и второе уравнения этой системы равносильны). Таким образом, шансы для видеопроката находиться в успешном или неудачном состояниях относятся как 7:5.

Теперь можно составить схему, по которой возможно рассчитать прибыль от работы видеопроката в таком "стационарном" режиме. Обозначаем символом УУ тот факт, что последние две недели проката были успешными, символом НН то, что последние две недели были неудачными, символом УН то, что за удачной неделей проката наступает неудачная, и, наконец, символ НУ означает, что за неудачной неделей наступает удачная. Обозначим вероятности перечисленных состояний через p_1, p_3, p_2, p_4 соответственно. На рисунке стрелками обозначаются возможные изменения состояний, а рядом подписываются соответствующие вероятности.



Для каждого состояния, в котором может находиться видеопрокат, запишем уравнение, связывающее вероятности, с которыми в это состояние можно попасть из других состояний. Например, для состояния УУ рассуждения, приводящие к уравнению, имеют такой вид: в состояние, когда подряд две недели работы проката являются успешными, можно попасть либо из состояния, когда за неудачной неделей следовала удачная (с вероятностью 0.5), либо из состояния, когда две последние недели уже были удачными (с вероятностью 0.5), так что $p_1 = 0.5p_1 + 0.5p_4$ (здесь применяется ФПВ). Аналогично составляем остальные уравнения. Учитывая, что сумма всех вероятностей равна 1, запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} p_1 = 0.5p_1 + 0.5p_4, \\ p_2 = 0.5p_1 + 0.5p_4, \\ p_3 = 0.3p_2 + 0.3p_3, \\ p_4 = 0.7p_3 + 0.7p_2, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что $p_1 = p_2 = p_4 = \dfrac{7}{24}$, $p_3 = \dfrac{3}{24}$. Это вероятности того, что видеопрокат, работая в стационарном режиме, находится в соответствующих состояниях. Теперь мы в состоянии просчитать среднюю прибыль $\mathbb{M}P$, приносимую видеопрокатом:

$$\mathbb{M}P = (5000 + 1500 + 2000) \cdot \frac{7}{24} - 4000 \cdot \frac{3}{24} \approx 1979\$.$$

3. Пусть M_x — среднее число бросков до конца игры, если у одного игрока x монет, а у другого $m + n - x$ монет. В силу симметричности монеты и равноправного положения игроков

$$M_0 = M_{m+n} = 0,\ M_x = M_{m+n-x}.$$

После подбрасывания монеты с равными вероятностями у первого игрока может стать либо $x + 1$ монета, либо $x - 1$ монета, так что

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot (M_{x-1} + 1) + \frac{1}{2} \cdot (M_{x+1} + 1),$$

что равносильно соотношению

$$-M_{x-1} + 2M_x - M_{x+1} = 2.$$

Суммируя по x от 1 до $m + n - 1$, имеем

$$M_1 + M_{m+n-1} = 2(m + n - 1),$$

откуда

$$M_1 = m + n - 1.$$

Теперь, используя соотношение $-M_{x-1} + 2M_x - M_{x+1} = 2$, с помощью метода математической индукции нетрудно показать, что

$$M_k = k(m + n - k).$$

Откуда $M_m = mn$, так что до окончания игры придется в среднем подбросить монету mn раз. К примеру, если у каждого из игроков по 10 монет, то до разорения одного из них нужно ждать в среднем 100 бросаний.

4. Пятница — 13 (задача-шутка). Календарь[9] повторяется каждые 400 лет. На эти годы приходится 97 високосных лет и 20 871 неделя. За 400 лет 13-е число приходит 4800 раз, распределяясь таким образом: воскресенье — 687, понедельник — 685, вторник — 685, среда — 687, четверг — 684, пятница — 688, суббота — 684 раза. Таким образом, среди 13-х чисел пятница встречается чаще всего!

5. Пусть на руках уже есть i вкладышей. Обозначим через M_i среднее число жевательных резинок, которое нужно купить (и обязательно пережевать!), чтобы собрать полную коллекцию из n вкладышей. Ясно, что $M_n = 0$. Требуется определить M_0. При покупке (и обязательном пережевывании!) очередной жвачки с вероятностью i/n ситуация остается прежней, а с вероятностью $(n-i)/n$ приобретается новый вкладыш. Значит,

$$M_i = 1 + \frac{i}{n}M_i + \frac{n-i}{n}M_{i+1},$$

откуда

$$M_i = M_{i+1} + \frac{n}{n-i}.$$

Вычисляем M_0:

$$M_0 = M_1 + \frac{n}{n} = M_2 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n} = \ldots = M_n + \frac{n}{1} + \ldots + \frac{n}{n} =$$

$$= n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Если $n = 99$ (случай со вкладышами от “*Love is*”), то среднее количество жевательных резинок составляет около 514 штук. Этот результат можно определить с помощью компьютера или микрокалькулятора.

6. Тонкий расчет в “Любви с первого взгляда”. Прежде чем решать задачу для классической игры, в которой участвуют трое юношей и три девушки, кратко рассмотрим упрощенный вариант, когда играют

[9] Кратко опишем, как устроен современный календарь. Каждый четвертый год является високосным, и тогда в феврале насчитывается 29 дней. Однако, если номер года кратен 100, то этот год високосным не является, а в феврале будет 28 дней. Но если номер года кратен 400, то этот год все-таки считается високосным.

двое юношей и две девушки. Здесь количество комбинаций невелико и задачу проще всего решить перебором. Обозначив юношей через A и B, а девушек — через C и D, мы можем записать сделанный ими выбор с помощью четырехбуквенных слов. Например, слово $CCAB$ имеет следующий смысл: юноша A выбрал девушку C (первая буква слова), юноша B также выбрал девушку C (вторая буква слова), девушка C выбрала юношу A (третья буква слова), а девушка D выбрала юношу B (четвертая буква слова). Указанное выше слово позволяет заключить, что совпала одна пара $(A+C)$. Существует 4 варианта для выбора первых двух букв слова и 4 варианта для выбора последующих букв, так что всего имеем $4 \cdot 4 = 16$ слов. Выписав все эти слова, подсчитаем, что две пары совпадут в двух случаях ($CDAB$ и $DCBA$), одна пара образуется 12 случаях, и не получится ни одной пары в двух случаях ($CDBA$ и $DCAB$). Так как все варианты равновозможны, то вероятность совпадения одной пары равна $\dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$, а не образуется ни одной пары или будет две пары с вероятностями по $\dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.

Теперь перейдем к игре с тремя юношами и тремя девушками. Перебор вручную $3^6 = 729$ вариантов здесь вряд ли возможен (хотя для компьютера это не проблема). Будем решать задачу с применением формулы полной вероятности. Введем гипотезы

$$H_i = \{\text{юноши выбрали } i \text{ девушек}\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Определим вероятности этих гипотез.

Событие H_1 имеет место тогда и только тогда, когда все юноши сделали одинаковый выбор. Это происходит в 3 случаях из 27 возможных (всеми юношами выбрана первая, вторая или третья девушка). Поэтому

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}.$$

Событие H_3 имеет место в том и только том случае, когда все юноши сделали разный выбор. Это может случиться $3! = 6$ способами, значит

$$\mathbb{P}(H_3) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

Найдем вероятность события H_2. Для этого подсчитаем, сколькими способами двое юношей могут выбрать одну девушку, а третий юноша —

другую. Из трех девушек можно выбрать двух C_3^2 способами, решить какую из них будут выбирать двое юношей, можно двумя способами и, наконец, распределить, кто из юношей будет выбирать какую девушку, можно $\frac{3!}{2!}$ способами (перестановки с повторениями). Поэтому число способов равно $C_3^2 \cdot 2 \cdot \frac{3!}{2!} = 18$, значит

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{18}{27} = \frac{6}{9}.$$

Как и должно быть,

$$\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(H_3) = 1.$$

Обозначим символом A_k, $k = 0$, 1, 2, 3, событие, состоящее в совпадении k пар. Определим вероятности этих событий.

Три пары совпадают, если реализуется событие H_3 и каждая из девушек угадывает того юношу, который ее выбрал, поэтому с использованием формулы условной вероятности

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(H_3) \cdot \mathbb{P}(A_3|H_3) = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{243}.$$

Две пары могут образоваться только при реализации событий H_2 или H_3, поэтому

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(H_2) \cdot \mathbb{P}(A_2|H_2) + \mathbb{P}(H_3) \cdot \mathbb{P}(A_2|H_3).$$

Найдем условные вероятности, входящие в последнее равенство. Пусть произошло событие H_2, например, первый и второй юноша выбрали первую девушку, а третий юноша — вторую. Две пары совпадут тогда и только тогда, когда первая девушка выберет любого из выбравших ее юношей (вероятность угадать равна $\frac{2}{3}$), а вторая — выбравшего ее третьего юношу (вероятность угадать равна $\frac{1}{3}$). Так что

$$\mathbb{P}(A_2|H_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Пусть теперь произошло событие H_3, например, первый, второй и третий юноша выбрали, соответственно, первую, вторую и третью девушку.

Две пары совпадут тогда и только тогда, когда две девушки угадают, кто их выбрал, а одна — нет. Здесь можно применить схему Бернулли с вероятностью “успеха” $p = \frac{1}{3}$, числом “экспериментов” $n = 3$ и количеством “успешных экспериментов” $k = 2$. Вероятность

$$\mathbb{P}(A_2|H_3) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Находим вероятность совпадения двух пар:

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{48}{243}.$$

Вероятность образования лишь одной пары

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A_1|H_1) + \mathbb{P}(H_2) \cdot \mathbb{P}(A_1|H_2) + \mathbb{P}(H_3) \cdot \mathbb{P}(A_1|H_3).$$

Если все юноши выбрали одну девушку (произошло событие H_1), то одна пара совпадет наверняка, поэтому

$$\mathbb{P}(A_1|H_1) = 1.$$

Пусть выполнено событие H_2, например, первый и второй юноша выбрали первую девушку, а третий юноша — вторую. Одна пара совпадет либо если первая девушка укажет на одного из выбравших ее юношей (вероятность $\frac{2}{3}$), а вторая не угадает, кто ее выбрал (вероятность $\frac{2}{3}$), либо наоборот. Таким образом,

$$\mathbb{P}(A_1|H_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}.$$

Наконец, если произошло событие H_3, то одна из девушек должна угадать, кто ее выбрал, а две остальные — нет. Опять применяем формулу Бернулли:

$$\mathbb{P}(A_1|H_3) = C_3^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Находим вероятность образования одной пары:

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{9} \cdot 1 + \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{141}{243}.$$

Осталось определить вероятность того, что не образуется ни одной пары:

$$\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(H_1) \cdot \mathbb{P}(A_0|H_1) + \mathbb{P}(H_2) \cdot \mathbb{P}(A_0|H_2) + \mathbb{P}(H_3) \cdot \mathbb{P}(A_0|H_3).$$

Если все юноши выбрали одну девушку (событие H_1), то как минимум одна пара уже образовалась, значит

$$\mathbb{P}(A_0|H_1) = 0.$$

Если все юноши выбрали разных девушек (событие H_3), то для реализации события A_0 каждая из них должна не угадать, кто ее выбрал. Получаем, что

$$\mathbb{P}(A_0|H_3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

Пусть произошло событие H_2, например, первый и второй юноша выбрали первую девушку, а третий юноша — вторую. Тогда A_0 реализуется в том и только том случае, когда первая девушка укажет на третьего юношу, а вторая — на первого или второго. Таким образом,

$$\mathbb{P}(A_0|H_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Находим вероятность события A_0:

$$\mathbb{P}(A_0) = \frac{1}{9} \cdot 0 + \frac{6}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{8}{27} = \frac{52}{243}.$$

Для проверки можно найти сумму полученных вероятностей:

$$\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = \frac{52}{243} + \frac{141}{243} + \frac{48}{243} + \frac{2}{243} = 1.$$

Итак, задача решена.

Можно ли рассчитать вероятности и вывести общие формулы для игры n юношей и n девушек? Попробуйте сделать это для $n = 4$. Одна из трудностей, которые появятся, состоит в усложнении расчета условных вероятностей $\mathbb{P}(A_k|H_i)$.

Другой вопрос, который возникает в связи с этой задачей, состоит в следующем: при каких n задача может быть решена прямым перебором с помощью компьютера. Нетрудно понять, что придется перебирать

$(n^n)^2$ вариантов, что при $n = 5, 6$ уже очень затруднительно. Возможно, наилучший подход состоит в том, чтобы научиться эффективно определять $\mathbb{P}(H_i)$ и $\mathbb{P}(A_k|H_i)$ пусть и с помощью некоторого перебора, но гораздо меньшего объема. Как это делать — вопрос остается открытым.

7. Наилучший выбор при полном отсутствии информации. Пусть, например, шаров $n = 100$, и на первом выбранном шаре оказалось число 1000. Брать его или нет? Может быть, на следующем шаре окажется число 1 000 000, а может, 0.001. Если решить брать первый же вытянутый шар, то вероятность выигрыша будет равна $1/n$. Этот же ответ можно получить, если брать второй, десятый, последний шар. Поэтому задача может показаться бессмысленной.

Но это рассуждение поверхностно. С каждым сброшенным шаром растут шансы потерять шар с максимальным номером, но растет и информация о шарах в урне. Если сброшен шар с числом 5, то в дальнейшем уже не имеет смысла брать шары с числами меньшими, чем 5.

Вот тактика, которая дает вероятность выигрыша больше 1/4. Пропустим первую половину шаров, запомнив максимальное встретившееся число. Затем возьмем первый же шар, на котором будет число, бóльшее запомненного. Эта тактика заведомо приведет к выигрышу, если шар с максимальным номером встретится во второй половине, а со вторым по величине числом — в первой. Вероятность такого совпадения при большом n примерно равна $1/4$.

Займемся поиском оптимальной тактики. Зафиксируем n и обозначим через $a_1 > a_2 > \ldots$ числа, написанные на шарах в порядке убывания. Пусть мы пропускаем первые i шаров, запоминаем максимальное встретившееся число и берем первый же шар с числом, бóльшим того, что запомнили. Вероятность P выигрыша складывается из вероятностей таких несовместных событий:

{шар a_2 будет выбран; a_1 останется};

{шар a_3 будет выбран; a_1, a_2 останутся и первым из них встретится a_1};

. . . .

{шар a_k будет выбран; a_1, a_2, $\ldots$, a_{k-1} останутся и первым из них встретится a_1;

. . . .

(Здесь “выбран” означает выбран среди первых i шаров, а “встретится” — встретится при дальнейшей выборке.)

Вероятность того, что a_k будет выбран, равна i/n (первых мест i, а всего мест n).

Вероятность того, что при этом a_1, a_2, $\ldots$, a_{k-1} останутся, равна ($j = n - i$):

$$\frac{j}{n-1} \cdot \frac{j-1}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{j-(k-2)}{n-(k-1)}$$

(для a_1 подходящих мест j, а всего осталось мест $n-1$; после этого для a_2 подходящих мест $j-1$, а всего осталось мест $n-2$ и т. д.). Наконец, среди шаров a_1, a_2, $\ldots$, a_{k-1} любой заданный шар может оказаться первым с вероятностью $1/(k-1)$.

Следовательно, вероятность P_k того, что шар a_k будет выбран, а шары a_1, a_2, $\ldots$, a_{k-1} останутся и первым среди них встретится a_1, равна

$$P_k = \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{k-1} \cdot \frac{j(j-1)\ldots(j-(k-2))}{(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}.$$

Вероятность P выигрыша будет равна сумме

$$P = \sum_{k=2}^{j+1} P_k.$$

В этом месте можно сказать, что задача решена. Нетрудно написать программу для компьютера, которая по данным значениям n перебирает все i такие, что $3 \leq i < n-1$, определяет вероятности выигрыша и находит из них наибольшую.

Для тех, кто немного знаком с элементами математического анализа, можно предложить изящную оценку для выбора оптимального i.

Если обозначить $x = i/n$, $y = j/n$, тогда

$$P_k = \frac{x}{k-1} \cdot \frac{y(y-1/n)\ldots(y-(k-2)/n)}{(1-1/n)\ldots(1-(k-1)/n)}.$$

При условии, что x постоянно, получаем

$$P_k \to x\frac{y^{k-1}}{k-1} \quad \text{при } n \to \infty.$$

и можно показать, что

$$P \to x(y + y^2/2 + y^3/3 + \ldots) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Хорошо известен ряд

$$\ln(1+y) = y - y^2/2 + y^3/3 - \ldots,$$

значит,

$$\ln(1-y) = -(y + y^2/2 + y^3/3\ldots).$$

следовательно, при $n \to \infty$ предел P (обозначим его через $P(x)$) равен

$$P(x) = -x \ln x.$$

чтобы найти максимум $P(x)$, продифференцируем $P(x)$ и приравняем производную к нулю:

$$P'(x) = -(\ln x + x/x) = -(\ln x + 1) = 0.$$

Откуда $\ln x = -1$ и $x = 1/e$, где e — основание натуральных логарифмов ($e \approx 2.71828\ldots$). При этом

$$P(1/e) = 1/e \approx 0.368\ldots$$

Итак, при наилучшем выборе i

$$i/n \approx 1/e \quad \text{и} \quad P(i/n) \approx 1/e$$

нужно пропустить $i \approx n/e$ шаров, потом взять первый, бóльший выпавших. Вероятность выигрыша будет приблизительно $1/e$. Так, при $n = 100$ надо пропустить $i = 37$ шаров и $P \approx 0.368$.

Список литературы

[1] Беррондо М. Занимательные задачи. Пер. с франц./ Перевод Сударева Ю. Н.; Под редакцией и с предисл. И. М. Яглома. — М.: “Мир”, 1983. — 230 с.

[2] Брудно А. Л., Каплан Л. И. Московские олимпиады по программированию./ Под ред. акад. Б. Н. Наумова. — 2-е изд., доп. и перераб. — М.: “Наука”. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 208 с.

[3] Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: “Наука”. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. — 328 с.

[4] Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. Пер. с англ. Ю. А. Данилова. М.: “Оникс”, 1994, 511 с.

[5] Гарднер М. Путешествие во времени. Пер. с англ. М.: “Мир”, 1990, 341 с.

[6] Избранные задачи. Сборник. Пер. с англ. Ю. А. Данилова. Под ред. и с предисл. В. М. Алексеева. М., “Мир”, 1977, 597 с.

[7] Коршунов Д. А., Фосс С. Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей: Учебное пособие. — Новосибирск: Издательство НИИ МИОО НГУ, 1997. — 114 с.

[8] Коффман А., Фор Р. Займемся исследованием операций. Пер. с франц. Под ред. А. А. Корбута с предисловием Н. Н. Воробьева. М., “Мир”, 1966, 280 с.

[9] Реньи А. Трилогия о математике. (Диалоги о математике. Письма о вероятности. Дневник. — Записки студента по теории информации.) Пер. с венгер./ Под ред. и с предисл. акад. АН УССР проф. Б. В. Гнеденко. — М.: “Мир”, 1980, 376 с.

[10] Скороход А. В. Вероятность вокруг нас. — Киев, “Наукова думка”, 1980, 196 с.